§ 5. Система граничных условий

В дальнейшем нам обычно придется рассматривать электромагнитные явления в телах, ограниченных в пространстве. Необходимо поэтому выяснить, как изменяются векторы электромагнитного поля вблизи границы тела. В самом общем случае граница тела служит границей раздела двух сред с различными свойствами. Мы будем предполагать, что с достаточной степенью точности границу раздела можно считать геометрической, и не будем интересоваться свойствами электромагнитного поля в переходном слое вблизи границы.

Пусть одна среда характеризуется проницаемостями ε_1 и μ_1, а вторая — соответственно ε_2 и μ_2. Поведение векторов поля на границе раздела может быть установлено из уравнений Максвелла, записанных в интегральной форме.

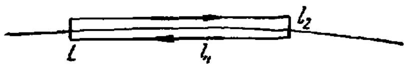

Рис. 83.

Рассмотрим уравнение (4,15) и применим его к бесконечно малому контуру L, изображенному на рис. 83, считая сторону l_1 бесконечно малой первого порядка, а сторону l_2 — бесконечно малой вторго прядка. Тогда имеем

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = E_{\text{tg}}^{(1)} l_1 - E_{\text{tg}}^{(2)} l_1 + \text{б. м. второго порядка.}$$

При этом E_{tg} означает касательную к поверхности раздела слагающую вектора напряженности электрического поля; индексы относятся к первой и второй средам.

Уравнение (4,15) дает

$$\left(E_{\text{tg}}^{(1)} - E_{\text{tg}}^{(2)}\right) l_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{5,1}$$

где Φ — поток магнитной индукции через поверхность, стягиваемую контуром L. Очевидно, $\Phi \sim l_1 l_2$ и является величиной старшего порядка малости. Поэтому, переходя к пределу $l_2 \to 0$, из (5,1) находим

$$E_{\text{tg}}^{(1)} = E_{\text{tg}}^{(2)}. \tag{5,2}$$

Тангенциальная слагающая напряженности электрического поля остается непрерывной при переходе через границу раздела сред.

Применим аналогичный прием к формуле (4,17). При этом сразу опустим член второго порядка малости $\int \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}$. Тогда находим

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\, \boldsymbol{l}\, dl_1,$$

где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор контура, лежащий в плоскости раздела (см. рис. 83).

Обозначим через $\boldsymbol{n}$ нормаль к поверхности раздела и через $\boldsymbol{n}_1$ нормаль к поверхности, охваченной контуром $\boldsymbol{l}$. Векторы $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{l}$ образуют правовинтовую систему:

$$\boldsymbol{l}=[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}].$$

Введем, далее, понятие поверхностной плотности тока j_s и будем под этим понимать количество электричества, проходящее за 1 *сек* через единичный отрезок на поверхности:

$$\lim_{dl_1\cdot dl_2\to 0} \boldsymbol{j}\boldsymbol{n}_1\, dl_1\, dl_2 = \boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1\, dl_1.$$

Тогда (4,17) дает

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1\, dl_1 = (\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\, \boldsymbol{l}\cdot dl_1,$$

или

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\, \boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1.$$

Выражая $\boldsymbol{l}$ через $\boldsymbol{n}_1$, имеем

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}_1[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1],$$

откуда

$$\boldsymbol{n}_1[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1.$$

Поскольку ориентация вектора $\boldsymbol{n}_1$ в плоскости раздела может быть произвольной, должно выполняться равенство

$$\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1] = \boldsymbol{j}_S. \qquad (5,3)$$

При наличии поверхностных токов тангенциальная слагающая напряженности поля $\boldsymbol{H}$ претерпевает разрыв непрерывности при переходе через границу раздела сред. Величина скачка ΔH_{tg} равна $\frac{4\pi}{c} j_S$.

Если поверхностный ток на границе раздела отсутствует, $j_S=0$, то

$$H_{tg}^{(1)} = H_{tg}^{(2)}. \qquad (5,4)$$

Граничные условия для нормальных слагающих векторов индукции $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ получаются из (4,16) и (4,18), если в качестве поверхности интегрирования выбрать бесконечно малую поверхность S, изображенную на рис. 84. Площадь оснований S_1 является бесконечно малой первого, а площадь боковых граней — бесконечно малой второго порядка. Из (4,16) находим

$$\left(B_n^{(1)} - B_n^{(2)}\right) S_1 + \text{б. м. второго порядка} = 0$$

или, переходя к пределу,

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}. \tag{5,5}$$

Нормальная слагающая вектора магнитной индукции при переходе через границу раздела сохраняется.

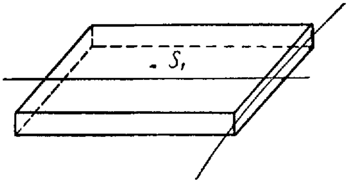

Рис. 84.

Аналогично из (4,18) находим

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} + 4\pi\omega_S, \tag{5,6}$$

где ω_S — поверхностная плотность заряда, определяемая, как и выше,

$$\lim_{h \to 0} \int \rho \, dV = \int \omega_S \, dS.$$

Если поверхностная плотность заряда $\omega_S = 0$, то

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}. \tag{5,7}$$

Уравнения (5,2), (5,3), (5,5) и (5,6) являются граничными условиями, которым должны удовлетворять векторы поля на границе раздела сред. В частности, на границе с вакуумом следует положить в этих формулах $\varepsilon_2 = \mu_2 = 1$.

§ 6. Пределы применимости системы уравнений связи

Мы получили систему уравнений Максвелла (вместе с уравнениями связи) из уравнений Максвелла — Лоренца путем усреднения, основываясь на некоторых допущениях о свойствах среды.

Хотя эти допущения носили довольно общий характер, они выполняются отнюдь не всегда. Оказывается, что область применимости уравнений связи и, следовательно, уравнений Максвелла в простейшей форме (4,4) — (4,7) достаточно ограничена. Мы должны особенно подчеркнуть эти ограничения потому, что в настоящее время в физике приходится все чаще сталкиваться с системами, к которым уравнения Максвелла в написанном нами виде неприменимы. Обычно в правой части уравнения (4,4) одно из слагаемых велико, тогда как другое — мало. Так, в идеальных диэлектриках ток проводимости $j = 0$, а в реальных диэлектриках он весьма мал по сравнению с током смещения $\frac{\partial D}{\partial t}$. Напротив, в проводниках обычно мал ток смещения. Поэтому уравнение (4,4) следует рассматривать как некоторое общее выражение, включающее в себя предельные реальные