ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 8. Электростатическое поле

Уравнения электромагнитного поля существенно упрощаются в случае электростатики.

Полагая, что поля не зависят от времени и ток равен нулю, можно написать систему уравнений Максвелла в виде

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho, \end{aligned}\right\} \tag{8,1}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8,2}$$

Мы не будем рассматривать постоянные магнитные поля в веществе [1]).

Уравнения (8,1) полностью определяют электростатическое поле в среде.

Подчеркнем, что ρ означает среднюю плотность свободных зарядов, введенных в диэлектрик извне. В отличие от проводников, свободные заряды в диэлектрике неподвижно фиксированы в определенных положениях.

Если диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле, связанные заряды, входящие в состав молекул, или ионы, образующие ионную решетку, смещаются друг относительно друга так, что диэлектрик поляризуется. При неоднородной поляризации в диэлектрике возникает объемный связанный заряд, средняя плотность которого определяется формулой (3,6). Напомним, что полный связанный заряд, появившийся в диэлектрике при поляризации, всегда равен нулю.

Наряду с объемной плотностью связанных зарядов на поверхности диэлектрика при его поляризации возникает поверхностная плотность заряда $\omega_s = P_n$.

---

[1]) См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1967.

Поле внутри диэлектрика согласно (8,1) является безвихревым. Потенциал электростатического поля, определяемый по (6,2), удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho. \tag{8,3}$$

В однородном диэлектрике $\varepsilon = \text{const}$, и последнее уравнение переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{8,4}$$

Из уравнения Пуассона следует, что в однородном диэлектрике потенциал поля, создаваемого зарядами с объемной плотностью свободного заряда ρ, можно написать в виде

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho\, dV}{r}. \tag{8,5}$$

Формула (8,5) показывает, что потенциал поля и самое поле в диэлектрической среде уменьшено по сравнению с полем, создаваемым теми же зарядами в пустоте, в ε раз. В частности, поле точечного заряда в диэлектрической среде равно

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{R}}{\varepsilon R^3}.$$

Соответственно сила взаимодействия зарядов по закону Кулона в однородной диэлектрической среде меньше, чем в пустоте, в ε раз. Этот результат имеет простой смысл: электрическое поле, создаваемое свободными зарядами, помещенными в диэлектрическую среду, вызывает ее поляризацию. При поляризации связанные заряды смещаются и создают в среде поле, ослабляющее поле свободных зарядов.

Необходимо подчеркнуть, что этот вывод относится исключительно к полю зарядов, помещенных внутрь однородного и изотропного диэлектрика. Из примеров, которые будут разобраны ниже, будет ясно, что к неоднородному диэлектрику этот вывод совершенно неприменим.

На границе раздела двух диэлектриков потенциал должен удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \tag{8,6}$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2. \tag{8,7}$$

Первое из них эквивалентно (5,2), второе непосредственно следует из (5,6), если положить поверхностную плотность свободного заряда $\omega_S = 0$.

Изображая наглядно распределение поля при помощи силовых линий, мы видим из граничных условий (8,6) и (8,7), что на границе раздела двух диэлектриков происходит преломление силовых линий, причем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{8,8}$$

Смысл углов α_1 и α_2 виден на рис. 85.

Рассмотрим теперь электростатическое поле в проводниках. Как мы подчеркивали уже выше, отличительной особенностью проводников является наличие в них большого количества подвижных зарядов. Появление внутри проводника среднего поля $\boldsymbol{E}$ всегда вызывает в нем электрический ток, представляющий перемещение свободных зарядов под действием поля. Если ток в проводнике отсутствует, а это и есть требование электростатики, то неизбежно и напряженность поля в проводнике равна нулю

$$\boldsymbol{E}=0.$$

Из равенства нулю поля во всей области пространства, заполненной проводником, следует, что объемная плотность заряда внутри проводника также равна нулю.

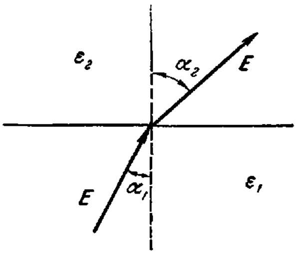

Рис. 85.

Обращение в нуль вектора напряженности электростатического поля в проводнике можно наглядно представить следующим образом: при внесении проводника во внешнее поле в нем начинается перемещение свободных зарядов к поверхности, которое происходит до тех пор, пока поле поверхностных зарядов полностью компенсирует внешнее поле внутри проводника.

Процесс происходит так, как будто бы проводник обладал бесконечно большой поляризуемостью при любом значении напряженности поля или, как это видно из (8,7), бесконечно большой диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2\to\infty$. Как видно из (8,8), линии электростатического поля подходят нормально к поверхности проводника. Хотя отождествление проводника с диэлектриком, имеющим бесконечно большую проницаемость, имеет формальный характер, — понятие поляризации неприменимо к свободным зарядам в проводниках, оно полезно лишь для наглядной интерпретации соотношений электростатики.

Значение поверхностной плотности заряда для проводников получается из граничного условия (5,6), если положить в нем напряженность поля внутри металла равной нулю. Тогда находим

$$\omega_S=\frac{\varepsilon E_n}{4\pi}, \tag{8,9}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник, E_n — нормальная слагающая внешнего поля у его поверхности. Граничное условие (5,2) дает для тангенциальной слагающей внешнего поля у поверхности проводника

$$E_{tg} = 0, \tag{8,10}$$

поскольку в самом проводнике она равна нулю.

Таким образом, внешнее поле проводника направлено нормально к его поверхности и $E_n = E$. Формулы (8,9) и (8,10) можно переписать, введя потенциал внешнего поля φ в виде

$$\left.\begin{aligned} \omega_S &= -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}, \\ \varphi &= \varphi_м = \mathrm{const} \end{aligned}\right\} \quad \text{на поверхности проводника.} \tag{8,11}$$

В частности, если металл находится в пустоте, величину ε следует положить равной единице.

Полный заряд на поверхности проводника

$$e = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_S dS, \tag{8,12}$$

где интегрирование ведется по всей поверхности проводника S. Формула (8,12) устанавливает связь между потенциалом поверхности проводника $\varphi_м$ и его зарядом e. Нетрудно убедиться, что эта связь имеет линейный характер: если увеличить φ в k раз, в силу (8,12) и постоянства потенциала вдоль поверхности металла, его заряд e увеличится во столько же раз.

Отношение заряда проводника к его потенциалу носит название емкости:

$$C = \frac{e}{\varphi_м} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\frac{1}{\varphi_м}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_S dS. \tag{8,13}$$

Емкость пропорциональна диэлектрической постоянной среды ε, а в остальном определяется исключительно формой проводника.

Как видно из (8,13), емкость имеет размерность длины, а по порядку величины C совпадает с линейным размером проводника. В случае, если в электростатическом поле имеется не один, а несколько проводников, граничные условия (8,11) должны выполняться на каждом из них.

При этом заряды на проводниках и их потенциалы не являются произвольными. Между ними существует некоторая связь, вытекающая из однозначности решения уравнения

Лапласа с граничными условиями типа (9,3). Нахождение взаимного влияния одних проводников на другие является сложной в математическом отношении задачей, и мы ее касаться не будем[1]).

§ 9. Решение задач электростатики

Мы можем теперь в общем виде сформулировать задачу электростатики.

Пусть задана некоторая система проводников и различных по своей природе диэлектриков, находящихся в конечной области пространства. Задана также плотность объемных зарядов ρ во всех точках пространства (в объеме, занятом проводниками, $\rho=0$). Тогда уравнение для потенциала имеет вид

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon_i}$$

(i — номер среды; в пустоте $\varepsilon=1$).

На границе раздела сред: пустота — диэлектрик, пустота — проводник и диэлектрик — проводник выполняется система граничных условий, разобранных выше. Потенциал на бесконечности удовлетворяет требованию в поле с центральной симметрией

$$\varphi \sim O\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right) \quad (\alpha \geqslant 0). \tag{9,1}$$

Требуется найти распределение потенциала и электрического поля во всем пространстве. Часто эту задачу именуют прямой задачей электростатики. При этом под обратной задачей понимают нахождение распределения заряда по известному распределению потенциала. Прямая задача электростатики является одной из основных задач математической физики. Элементарными приемами электростатическая задача решается лишь для отдельных простейших случаев. Разработан ряд методов ее решения и рассчитано множество конкретных систем. Важную роль среди них играют приближенные и численные методы. В нашу цель не входит разбор различных случаев электростатических полей. Мы рассмотрим лишь некоторые простейшие примеры, имеющие общий интерес.

В простейших случаях к результату сразу приводит применение интегральной теоремы Гаусса — Остроградского. Мы не будем, однако, останавливаться на этом элементарном методе расчета, известном из курса общей физики.

На примере простейших систем будет показан метод решения уравнения Пуассона, который является эффективным и

[1]) См., например, В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.