Лапласа с граничными условиями типа (9,3). Нахождение взаимного влияния одних проводников на другие является сложной в математическом отношении задачей, и мы ее касаться не будем[1]).

§ 9. Решение задач электростатики

Мы можем теперь в общем виде сформулировать задачу электростатики.

Пусть задана некоторая система проводников и различных по своей природе диэлектриков, находящихся в конечной области пространства. Задана также плотность объемных зарядов ρ во всех точках пространства (в объеме, занятом проводниками, $\rho=0$). Тогда уравнение для потенциала имеет вид

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon_i}$$

(i — номер среды; в пустоте $\varepsilon=1$).

На границе раздела сред: пустота — диэлектрик, пустота — проводник и диэлектрик — проводник выполняется система граничных условий, разобранных выше. Потенциал на бесконечности удовлетворяет требованию в поле с центральной симметрией

$$\varphi \sim O\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right) \quad (\alpha \geqslant 0). \qquad (9,1)$$

Требуется найти распределение потенциала и электрического поля во всем пространстве. Часто эту задачу именуют прямой задачей электростатики. При этом под обратной задачей понимают нахождение распределения заряда по известному распределению потенциала. Прямая задача электростатики является одной из основных задач математической физики. Элементарными приемами электростатическая задача решается лишь для отдельных простейших случаев. Разработан ряд методов ее решения и рассчитано множество конкретных систем. Важную роль среди них играют приближенные и численные методы. В нашу цель не входит разбор различных случаев электростатических полей. Мы рассмотрим лишь некоторые простейшие примеры, имеющие общий интерес.

В простейших случаях к результату сразу приводит применение интегральной теоремы Гаусса — Остроградского. Мы не будем, однако, останавливаться на этом элементарном методе расчета, известном из курса общей физики.

На примере простейших систем будет показан метод решения уравнения Пуассона, который является эффективным и

[1]) См., например, В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.

тогда, когда метод теоремы Гаусса оказывается несостоятельным.

Рассмотрим поле равномерно заряженной сферы. Полагая

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R, \end{cases}$$

где R — радиус сферы, запишем уравнение Пуассона в сферических координатах, учитывая, что из соображений симметрии потенциал может зависеть только от r, но не от полярных углов θ и ψ. С помощью (I, 84) получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_0 & \text{при} \quad r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases} \tag{9,2}$$

Интегрируя (9,2) в области $r<R$, находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{4\pi\rho_0 r}{3\varepsilon} + \frac{C_1}{r^2}.$$

Второе интегрирование дает

$$\varphi = -\frac{2\pi\rho_0}{3\varepsilon}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2. \tag{9,3}$$

Поскольку потенциал должен всюду и, в частности, в точке $r=0$ иметь конечное значение, следует положить $C_1=0$. Обозначив через φ_R потенциал на поверхности сферы, запишем (9,3) в виде

$$\varphi = \varphi_R - \frac{2\pi\rho_0}{3\varepsilon}(r^2 - R^2) \qquad (r \leqslant R).$$

Вводя полный заряд сферы

$$e = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0,$$

так что $\varphi_R = \frac{e}{\varepsilon R}$, можно записать φ в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{e}{\varepsilon R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (r \leqslant R). \tag{9,4}$$

При $r > R$ интегрирование (9,2) дает

$$r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = C_1,$$

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Полагая $\varphi=0$ при $r\to\infty$, находим, что $C_2=0$. На поверхности сферы должно выполняться граничное условие

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}\right)_{r=R}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R},$$

где слева стоит потенциал внутри, а справа вне сферы. Это условие дает $C_1=-e$, так что

$$\varphi=\frac{e}{r} \qquad (r>R).$$

Потенциал вне сферы совпадает с потенциалом точечного заряда, находящегося в центре сферы.

Найдем еще поле внутри и вне сферы и энергию поля сферы. Согласно (I, 71)

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{er}{\varepsilon R^3} \qquad (r\leqslant R),$$

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{e}{r^2} \qquad (r>R).$$

Полная энергия поля равномерно заряженной сферы равна

$$U=\frac{\varepsilon}{8\pi}\int\limits_0^R E^2\,dV+\frac{1}{8\pi}\int\limits_R^\infty E^2\,dV=\frac{3}{5}\frac{e^2}{R}. \tag{9,5}$$

Столь же просто можно найти поле неравномерно заряженной сферы, когда плотность заряда ρ зависит только от расстояния до центра сферы $\rho=\rho(r)$.

Именно,

$$\varphi=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\frac{dr'}{r'^2}\left(\int\limits_0^{r'}\rho(r)\,r^2\,dr\right)+C.$$

Между тем, уже эта простая задача не может быть решена с помощью теоремы Гаусса — Остроградского.

Совершенно аналогично решается задача о распределении потенциала внутри и вне равномерно заряженного цилиндра радиуса R.

Уравнение Пуассона на основании (I, 85) гласит:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\omega,$$

где ω — плотность заряда. Интегрирование дает

$$\varphi=\frac{\pi\omega}{\varepsilon}(R^2-\rho^2)-2\pi\omega R^2\ln R+C \qquad (\rho<R),$$

$$\varphi=-2\pi\omega R^2\ln\rho+C \qquad (\rho>R).$$

Следует обратить внимание на поведение потенциала вне цилиндра. При $\rho \to \infty$ имеет место логарифмическая расходимость φ. По этой причине значение постоянной C остается неопределенным. Поле вне цилиндра

$$E_\rho = -\frac{2\pi\omega R^2}{\rho} \qquad (\rho > R)$$

имеет всюду конечное значение.

§ 10. Методы изображений и отражений

При решении ряда электростатических задач полезно пользоваться теоремой единственности. Действительно, предположим, что для заданной системы нам удалось подобрать каким-нибудь образом потенциалы или электрические поля, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям и граничным условиям. В силу теоремы единственности можно считать найденное решение правильным независимо от способа его получения. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пусть бесконечная плоскость $x=0$ является поверхностью металла, который занимает полупространство $x<0$; в вакууме на расстоянии a от границы металл — вакуум помещен заряд e. Требуется найти напряженность поля во всем пространстве. Очевидно, что электрическое поле внутри металла (область $x<0$) равно нулю.

Уравнение Пуассона для потенциала в области $x>0$ имеет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}). \qquad (10,1)$$

Граничные условия для нашей задачи имеют следующий вид:

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

В плоскости $x=0$ должны выполняться соотношения:

$$\left.\begin{aligned} D_n^{(2)} &= D_n^{(1)} + 4\pi\omega_S = 4\pi\omega_S, \\ E_{\text{tg}}^{(1)} &= E_{\text{tg}}^{(2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10,2)$$

При этом учтено, что $D_n^{(1)} = 0$ в металле и на его поверхности. Условие для E_{tg} эквивалентно требованию постоянства потенциала на поверхности металла. Если электрическое поле вне металла будет найдено, то граничное условие (10,2) позволит нам определить заряд поверхности.

Для получения решения заметим, что уравнению (10,1) и условию постоянства потенциала на поверхности $x=0$ удовлетворяет потенциал поля двух зарядов, один из которых (e) находится в точке $x=+a$, а другой ($-e$) в точке $x=-a$:

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1}, \qquad (10,3)$$