Следует обратить внимание на поведение потенциала вне цилиндра. При $\rho \to \infty$ имеет место логарифмическая расходимость φ. По этой причине значение постоянной C остается неопределенным. Поле вне цилиндра

$$E_\rho = -\frac{2\pi\omega R^2}{\rho} \qquad (\rho > R)$$

имеет всюду конечное значение.

§ 10. Методы изображений и отражений

При решении ряда электростатических задач полезно пользоваться теоремой единственности. Действительно, предположим, что для заданной системы нам удалось подобрать каким-нибудь образом потенциалы или электрические поля, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям и граничным условиям. В силу теоремы единственности можно считать найденное решение правильным независимо от способа его получения. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пусть бесконечная плоскость $x=0$ является поверхностью металла, который занимает полупространство $x<0$; в вакууме на расстоянии a от границы металл — вакуум помещен заряд e. Требуется найти напряженность поля во всем пространстве. Очевидно, что электрическое поле внутри металла (область $x<0$) равно нулю.

Уравнение Пуассона для потенциала в области $x>0$ имеет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}). \tag{10,1}$$

Граничные условия для нашей задачи имеют следующий вид:

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

В плоскости $x=0$ должны выполняться соотношения:

$$\left.\begin{aligned} D_n^{(2)} &= D_n^{(1)} + 4\pi\omega_S = 4\pi\omega_S, \\ E_{\text{tg}}^{(1)} &= E_{\text{tg}}^{(2)}. \end{aligned}\right\} \tag{10,2}$$

При этом учтено, что $D_n^{(1)}=0$ в металле и на его поверхности. Условие для E_{tg} эквивалентно требованию постоянства потенциала на поверхности металла. Если электрическое поле вне металла будет найдено, то граничное условие (10,2) позволит нам определить заряд поверхности.

Для получения решения заметим, что уравнению (10,1) и условию постоянства потенциала на поверхности $x=0$ удовлетворяет потенциал поля двух зарядов, один из которых (e) находится в точке $x=+a$, а другой $(-e)$ в точке $x=-a$:

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1}, \tag{10,3}$$

где r и r_1 — расстояния от зарядов до точки наблюдения. В силу единственности решений уравнений Максвелла формула (10,3) дает искомое распределение.

Вычисление градиента φ позволяет определить электрическое поле $\boldsymbol{E}$.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложного случая, когда плоскость $x=0$ служит границей раздела двух диэлектриков. Полупространство $x>0$ и $x<0$ заполняют диэлектрики с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. В точке $x=a$ расположен заряд e. Следует найти распределение поля, создаваемого зарядом, находящимся в точке $x=a$, во всем пространстве.

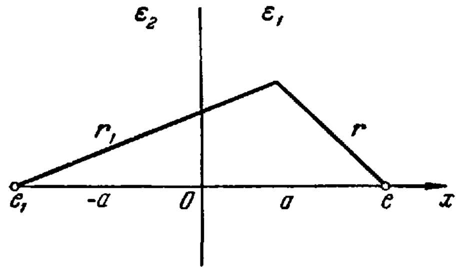

Рис. 86.

Дифференциальное уравнение для потенциала в области $x>0$ имеет вид

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi e}{\varepsilon_1}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}).$$

Будем считать, что на границе раздела нет свободных зарядов, так что граничные условия запишутся в форме

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

$$D_n^{(2)} = D_n^{(1)}, \tag{10,4}$$

$$E_{tg}^{(2)} = E_{tg}^{(1)}. \tag{10,5}$$

Мы постараемся решить эту задачу по аналогии с предыдущей, предполагая, что потенциал поля совпадает с потенциалом поля эквивалентных зарядов, расположенных в точках $x=a$ и $x=-a$.

Предположим, что поле в области $x>0$ эквивалентно полю двух зарядов: заряда e, находящегося в точке $x=a$ и неизвестного заряда e_1, помещенного в точку $x=-a$. В этом случае потенциал поля в области $x>0$ имеет вид (рис. 86)

$$\varphi_1 = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e}{\varepsilon_1 r} \qquad (x>0). \tag{10,6}$$

Предположим далее, что потенциал в области $x<0$ также представляется в виде потенциала поля точечного заряда

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{r}, \tag{10,7}$$

где e_2 — некоторый неизвестный заряд, помещенный в точке $x=a$.

Очевидно, что потенциалы φ_1 и φ_2 являются решением уравнений электростатики для соответствующих точечных зарядов. Электрические поля в обеих областях имеют вид

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{e_1 \boldsymbol{r}_1}{r_1^3} + \frac{e\boldsymbol{r}}{\varepsilon_1 r^3},$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{e_2 \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Подставляя эти значения в граничные условия (10,4) и (10,5), находим

$$\varepsilon_2 \frac{e_2 (\boldsymbol{r})_n}{r^3} = \varepsilon_1 \left[\frac{e (\boldsymbol{r})_n}{\varepsilon_1 r^3} + \frac{e_1 (\boldsymbol{r}_1)_n}{r_1^3}\right],$$

$$\frac{e_1 (\boldsymbol{r}_1)_{tg}}{r_1^3} + \frac{e (\boldsymbol{r})_{tg}}{\varepsilon_1 r^3} = \frac{e_2 (\boldsymbol{r})_{tg}}{r^3}.$$

Здесь $(\boldsymbol{r})_n$, $(\boldsymbol{r})_{tg}$ и $(\boldsymbol{r}_1)_n$, $(\boldsymbol{r}_1)_{tg}$ — соответственно нормальные и тангенциальные проекции векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_1$.

В плоскости $x=0$ имеются следующие очевидные соотношения:

$$|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_1| \quad (\boldsymbol{r}_1)_{tg} = (\boldsymbol{r})_{tg} \quad (\boldsymbol{r}_1)_n = -(\boldsymbol{r})_n.$$

Поэтому получаем два уравнения для определения зарядов e_1 и e_2:

$$e_2 = e_1 + \frac{e}{\varepsilon_1},$$

$$e_1 \varepsilon_1 = e - \varepsilon_2 e_2,$$

из которых следует

$$e_2 = \frac{2e}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

$$e_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) e}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Таким образом, потенциал поля выражается формулами:

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{e}{r_1} \qquad (x > 0),$$

$$\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{e}{r} \qquad (x < 0).$$

Аналогичным образом метод изображений применяется для решения более сложных с геометрической точки зрения задач.

Другим полезным приемом решения электростатических задач является метод отражений.

Если $\varphi(r, \theta, \psi)$ — потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа, то простой расчет показывает, что функция

$$\varphi_1 = -\frac{R}{r} \varphi\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \psi\right)$$

также удовлетворяет этому уравнению. Соотношение

$$\varphi_1+\varphi=0$$

выполнено на сфере радиуса $r=R$. Преобразование $r\to\frac{R^2}{r}$ с геометрической точки зрения представляет зеркальное отражение в сфере радиуса R.

В качестве простого примера применения метода отражений можно привести задачу о распределении потенциала в системе точечный заряд — заземленная сфера радиуса R. Положим потенциал сферы равным нулю. Если заряд e_1 находится на расстоянии p_1 от центра сферы, то потенциал поля, создаваемого этим зарядом и индуцированным на сфере зарядом, должен иметь нулевое значение на поверхности $r=R$. Этому условию удовлетворяет потенциал вне сферы, даваемый формулой

$$\varphi=\frac{e_1}{r_1}-\frac{e_2}{r_2},$$

если подобрать должным образом неизвестные величины — заряд e_2 и его местонахождение.

Именно положим, что фиктивный заряд помещен в точке, удаленной от центра сферы на расстояние p_2, причем

$$p_1p_2=R^2.$$

Если абсолютная величина этого заряда равна

$$e_2=e_1\sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

то оба заряда создают на поверхности сферы потенциал, равный нулю.

Таким образом,

$$\varphi=\frac{e_1}{r_1}-\frac{R}{p_2}\frac{e_1}{r_2}.$$

§ 11. Энергия системы проводников

Перейдем теперь к рассмотрению энергетических соотношений в электростатическом поле. Проще всего энергетические соотношения выглядят для проводников.

Поскольку поле не проникает внутрь проводников, их термодинамические свойства не изменяются. Однако наличие проводника изменяет конфигурацию поля в окружающем пространстве.

Энергию электромагнитного поля, окружающего проводник, принято называть электромагнитной энергией проводника. Полная энергия проводника равна сумме его внутренней и электромагнитной энергий.