также удовлетворяет этому уравнению. Соотношение

$$\varphi_1+\varphi=0$$

выполнено на сфере радиуса $r=R$. Преобразование $r \to \frac{R^2}{r}$ с геометрической точки зрения представляет зеркальное отражение в сфере радиуса R.

В качестве простого примера применения метода отражений можно привести задачу о распределении потенциала в системе точечный заряд — заземленная сфера радиуса R. Положим потенциал сферы равным нулю. Если заряд e_1 находится на расстоянии p_1 от центра сферы, то потенциал поля, создаваемого этим зарядом и индуцированным на сфере зарядом, должен иметь нулевое значение на поверхности $r=R$. Этому условию удовлетворяет потенциал вне сферы, даваемый формулой

$$\varphi=\frac{e_1}{r_1}-\frac{e_2}{r_2},$$

если подобрать должным образом неизвестные величины — заряд e_2 и его местонахождение.

Именно положим, что фиктивный заряд помещен в точке, удаленной от центра сферы на расстояние p_2, причем

$$p_1p_2=R^2.$$

Если абсолютная величина этого заряда равна

$$e_2=e_1\sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

то оба заряда создают на поверхности сферы потенциал, равный нулю.

Таким образом,

$$\varphi=\frac{e_1}{r_1}-\frac{R}{p_2}\frac{e_1}{r_2}.$$

§ 11. Энергия системы проводников

Перейдем теперь к рассмотрению энергетических соотношений в электростатическом поле. Проще всего энергетические соотношения выглядят для проводников.

Поскольку поле не проникает внутрь проводников, их термодинамические свойства не изменяются. Однако наличие проводника изменяет конфигурацию поля в окружающем пространстве.

Энергию электромагнитного поля, окружающего проводник, принято называть электромагнитной энергией проводника. Полная энергия проводника равна сумме его внутренней и электромагнитной энергий.

Ниже мы будем интересоваться только последней и для краткости говорить просто об энергии проводника.

Рассмотрим энергию системы проводников. Мы будем предполагать вначале, что проводники находятся в пустоте. Полная энергия электростатического поля равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \, dV.$$

Преобразуем интеграл, написав его в виде

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \boldsymbol{E} \operatorname{grad} \varphi \, dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{E}) \, dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{E} \, dV =$$
$$= -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{R \to \infty} \varphi \boldsymbol{E} \, d\boldsymbol{S} + \frac{1}{8\pi} \sum_i \oint \varphi_i \boldsymbol{E}_i \, d\boldsymbol{S}_i.$$

Интегрирование ведется по всем поверхностям, ограничивающим объем интегрирования. Таковыми служат внешняя поверхность радиуса $R \to \infty$ и поверхности проводников. Поскольку внешние нормали у этих поверхностей ориентированы в противоположных направлениях, перед поверхностными интегралами стоят разные знаки. Мы воспользовались также тем, что в пустоте

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю в силу (9,1). На металлических поверхностях

$$\varphi_{\text{м}_i} = \text{const},$$

поэтому

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_i \oint \varphi_i \boldsymbol{E}_i \, d\boldsymbol{S}_i = \frac{1}{8\pi} \sum_i \varphi_i \oint \boldsymbol{E}_i \, d\boldsymbol{S}_i =$$
$$= -\frac{1}{8\pi} \sum_i \varphi_{\text{м}_i} \oint \left(\frac{\partial \varphi_{\text{м}_i}}{\partial n} \right) dS_i = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_{\text{м}_i}.$$

Энергия системы проводников формально совпадает с энергией системы зарядов.

Предположим теперь, что пространство между проводниками заполняется диэлектриком. При этом возможны в принципе два случая:

а) проводники изолированы, так что заряды всех проводников имеют постоянное значение;

б) проводники соединены с устройствами, поддерживающими их потенциалы постоянными.

В первом случае, как видно из формулы (9,4), имеем

$$e=-\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS=-\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS,$$

так что

$$\varphi'=\frac{\varphi}{\varepsilon}.$$

Соответственно

$$U'=\frac{1}{2}\sum_i e_i\varphi_{\text{м}i}=\frac{U}{\varepsilon}.$$

Поля и энергия уменьшаются в ε раз. Энергия расходуется на работу, выполняемую при заполнении пространства диэлектриком.

Во втором случае заряд каждого из проводников будет равен после заполнения диэлектриком

$$e'=\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS=\varepsilon e,$$

и энергия

$$U'=\varepsilon U.$$

Увеличение энергии и работа над диэлектриком происходят за счет устройств, поддерживающих постоянными потенциалы проводников.

§ 12. Диэлектрики и проводники во внешнем электростатическом поле

Если во внешнее поле $E_0^{(e)}$ поместить незаряженный проводник или диэлектрик, конфигурация поля вблизи тела изменится. Это изменение существенно зависит от формы тел и характера внешнего поля, как это ясно видно из разбираемых ниже примеров.

Рассмотрим прежде всего случай диэлектрика.

В дальнейшем мы будем считать внешнее поле однородным на протяжении тела. Все величины, относящиеся к области пространства внутри тела, будем отмечать индексом «i».

В качестве простейших примеров рассмотрим длинный цилиндр, ориентированный осью вдоль поля, и тонкую плоскопараллельную пластинку, расположенную перпендикулярно к полю.

В первом случае поляризация диэлектрика вызовет появление поверхностных зарядов на основаниях цилиндра. Однако, поскольку длина цилиндра велика, эти заряды создают лишь слабое поле, не искажающее внешнее поле внутри цилиндра.