В первом случае, как видно из формулы (9,4), имеем

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS,$$

так что

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\varepsilon}.$$

Соответственно

$$U' = \frac{1}{2}\sum_i e_i\varphi_{\text{м}i} = \frac{U}{\varepsilon}.$$

Поля и энергия уменьшаются в ε раз. Энергия расходуется на работу, выполняемую при заполнении пространства диэлектриком.

Во втором случае заряд каждого из проводников будет равен после заполнения диэлектриком

$$e' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = \varepsilon e,$$

и энергия

$$U' = \varepsilon U.$$

Увеличение энергии и работа над диэлектриком происходят за счет устройств, поддерживающих постоянными потенциалы проводников.

§ 12. Диэлектрики и проводники во внешнем электростатическом поле

Если во внешнее поле $E_0^{(e)}$ поместить незаряженный проводник или диэлектрик, конфигурация поля вблизи тела изменится. Это изменение существенно зависит от формы тел и характера внешнего поля, как это ясно видно из разбираемых ниже примеров.

Рассмотрим прежде всего случай диэлектрика.

В дальнейшем мы будем считать внешнее поле однородным на протяжении тела. Все величины, относящиеся к области пространства внутри тела, будем отмечать индексом «i».

В качестве простейших примеров рассмотрим длинный цилиндр, ориентированный осью вдоль поля, и тонкую плоскопараллельную пластинку, расположенную перпендикулярно к полю.

В первом случае поляризация диэлектрика вызовет появление поверхностных зарядов на основаниях цилиндра. Однако, поскольку длина цилиндра велика, эти заряды создают лишь слабое поле, не искажающее внешнее поле внутри цилиндра.

То же видно из граничного условия (5,2), которое дает

$$E^{(i)}_{tg} = E^{(e)}_{tg}$$

и, поскольку вектор $\boldsymbol{E}$ в силу условий симметрии параллелен оси цилиндра,

$$E^{(i)} = E^{(e)}_{(0)}. \qquad (12,1)$$

Во втором примере поверхностные заряды создают заметное ослабление внешего поля. Граничное условие (5,7) дает

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}^{(i)} &= \boldsymbol{E}^{(e)}_0, \\ \text{или} \qquad \boldsymbol{E}^{(i)} &= \boldsymbol{E}^{(e)}_0 - 4\pi\boldsymbol{P}. \end{aligned}\right\} \qquad (12,2)$$

Поле внутри пластинки ослаблено на величину $4\pi\boldsymbol{P}$. Этот вывод, как показывают расчеты, качественно сохраняется для тел более сложной формы.

В качестве следующего примера рассмотрим диэлектрический шар в однородном внешнем поле $\boldsymbol{E}^{(e)}_0$. Распределение потенциала определится из решения уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

которое удовлетворяет требованию

$$\varphi = -\boldsymbol{E}^{(e)}_0\boldsymbol{r} \qquad (12,3)$$

вдали от шара ($r \gg R$) и удовлетворяет граничным условиям (8,6)—(8,7) на его поверхности. Будем пытаться искать решение в виде

$$\varphi^{(e)} = \varphi_0 + \varphi^{(e)}_1(r, \ \theta, \ \boldsymbol{E}^{(e)}_0),$$

где $\varphi_0 = -\boldsymbol{E}^{(e)}_0\boldsymbol{r}$, а $\varphi^{(e)}_1$ представляет изменение потенциала вблизи шара.

Функция $\varphi^{(e)}_1$ должна убывать при $r \gg R$. Поскольку $\varphi^{(e)}_1$ зависит только от вектора $\boldsymbol{E}^{(e)}_0$, скаляров r и θ и сама должна быть скаляром, ее можно написать в виде комбинации векторов $\boldsymbol{E}^{(e)}_0$ и $\boldsymbol{r}$ или $\boldsymbol{E}^{(e)}_0$ и градиента $\frac{1}{r}$. В первом случае $\varphi^{(e)}_1$ не удовлетворяло бы требованию убывания на бесконечности, так что единственный возможный вид $\varphi^{(e)}_1$ таков:

$$\varphi^{(e)}_1 = \alpha\boldsymbol{E}^{(e)}_0 \operatorname{grad}\frac{1}{r},$$

где α — постоянная. Поэтому

$$\varphi^{(e)} = -\boldsymbol{E}^{(e)}_0\boldsymbol{r} + \alpha\boldsymbol{E}^{(e)}_0 \operatorname{grad}\frac{1}{r}. \qquad (12,4)$$

Напротив, внутри сферы потенциал $\varphi^{(i)}$ во всех точках должен оставаться конечным и поэтому должен быть написан в виде

$$\varphi^{(i)} = \beta \boldsymbol{E}_0^{(e)} \boldsymbol{r}. \tag{12,5}$$

Очевидно, что как (12,4), так и (12,5) удовлетворяют уравнению Лапласа, а φ_0 ведет себя на бесконечности в соответствии с (12,3).

Для нахождения двух неизвестных α и β можно использовать два граничных условия:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(i)} &= \varphi^{(e)}, \\ \varepsilon^{(i)} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} &= \varepsilon^{(e)} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad r = R.$$

Элементарные вычисления, которые удобнее всего проводить в сферических координатах, дают

$$\alpha = \frac{\varepsilon^{(e)} - \varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} R^3,$$

$$\beta = -\left(1 - \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}}\right) = -\frac{3\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}},$$

так что окончательно

$$\varphi^{(e)} = -\left(\boldsymbol{E}_0^{(e)} \boldsymbol{r}\right) + \frac{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{r})\, V}{r^3}, \tag{12,6}$$

$$\varphi^{(i)} = -\left(\boldsymbol{E}_0^{(e)} \boldsymbol{r}\right) + \frac{4\pi}{3} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{r}), \tag{12,7}$$

где обозначено

$$\boldsymbol{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} \boldsymbol{E}_0^{(e)}, \tag{12,8}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

В частности, в пустоте $\varepsilon^{(e)} = 1$ и

$$\boldsymbol{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^{(i)} - 1}{\varepsilon^{(i)} + 2} \boldsymbol{E}_0^{(e)} = \frac{3\varkappa}{\varepsilon^{(i)} + 2} \boldsymbol{E}_0^{(e)}. \tag{12,9}$$

Если восприимчивость тела $\varkappa$ мала, так что $\varepsilon^{(i)} \approx 1$, то

$$\boldsymbol{P} \approx \varkappa \boldsymbol{E}_0^{(e)}.$$

Отсюда напряженность поля вне сферы

$$\boldsymbol{E}^{(e)} = -\operatorname{grad} \varphi^{(e)} = \boldsymbol{E}_0^{(e)} + V \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{r}) - r^2 \boldsymbol{P}}{r^5} \quad (r < R); \tag{12,10}$$

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = -\operatorname{grad} \varphi^{(i)} = -\frac{4\pi}{3} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{E}_0^{(e)} \quad (r < R). \tag{12,11}$$

При вычислении градиента по (I, 47) мы учитывали постоянство вектора $\boldsymbol{P}$.

Из формул (12,6)—(12,11) следует:

1) во внешнем однородном поле шар, поляризуясь, приобретает дипольный момент ($\boldsymbol{P}V$) и создает дополнительное поле, совпадающее с полем диполя, помещенным в центр шара;

2) внутри шара поле имеет постоянное значение и ослаблено в $\frac{3\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i)}+2\varepsilon^{(e)}}$ раз по сравнению с внешним полем.

Рассмотрим теперь незаряженный металлический шар, помещенный в однородное поле $\boldsymbol{E}_0$. Поле вне шара найдется из решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего тому же условию (12,3) на бесконечности и условию

$$\varphi = \varphi_{\text{м}} = 0 \tag{12,12}$$

на поверхности металла (потенциал $\varphi_{\text{м}}$ можно принять за нуль потенциала).

Выражение для $\varphi^{(e)}$ снова можно написать в виде (12,4) и подобрать α так, чтобы удовлетворялось условие (12,12).

Можно, однако, просто в формулах для $\varphi^{(e)}$, $\boldsymbol{E}^{(e)}$ и $\boldsymbol{P}$, полученных выше для диэлектрического шара, считать диэлектрическую проницаемость внутри сферы $\varepsilon^{(i)} \to \infty$. Тогда сразу получается выражение

$$\varphi^{(e)} = -E_0^{(e)} r\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta = -\boldsymbol{E}_0^{(e)}\boldsymbol{r} + \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{P})\,V}{r^3},$$

где положено

$$\boldsymbol{P} = \frac{3}{4\pi}\boldsymbol{E}_0^{(e)}.$$

Поле внутри шара

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = 0.$$

Плотность поверхностного заряда на поверхности шара равна

$$\omega_S = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^{(e)}_{r=R} = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta.$$

Полный заряд незаряженного шара остается, очевидно, равным нулю.

§ 13. Термодинамические потенциалы диэлектрика и диэлектрическая восприимчивость

Мы видели в предыдущем параграфе, что поле внутри диэлектрика существенно отличается от поля во внутреннем пространстве. При этом значение напряженности поля внутри диэлектрика зависит от его формы.