Если контур замкнут и точки 1 и 2 совпадают, поскольку в силу (14,2) поле $\boldsymbol{E}$ имеет потенциальный характер, интеграл $\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=0$ и

$$IR=\mathscr{E}^{\text{стор}}, \tag{15,7}$$

где R — сопротивление всего линейного контура и

$$\mathscr{E}^{\text{стор}}=\oint \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,d\boldsymbol{l}. \tag{15,8}$$

Произведение силы тока на полное сопротивление линейного контура с током равно э. д. с. замкнутой цепи с током.

Рассмотрим теперь энергетические соотношения для линейного контура с током.

Как мы подчеркивали, вся работа тока в цепи постоянного тока переходит в тепло. Поэтому полное тепло, выделившееся в линейном проводнике,

$$Q=\int \frac{j^2}{\sigma}\,dV=\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\text{стор}})\,dV=-\int \boldsymbol{j}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dV+\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV=$$
$$=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV-\int \mathrm{div}\,(\boldsymbol{j}\varphi)\,dV+\int \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}\,dV=$$
$$=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV-\oint \varphi j_n\,dS=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV$$

в силу (14,2), (14,4) и (14,9).

Полное тепло, выделяющееся в цепи, оказывается равным работе сторонних сил.

§ 16. Постоянный ток в проводящей среде

Другим предельным случаем является прохождение тока в системе, состоящей из хороших проводников (например, металлических электродов), погруженных в проводящую среду. Если считать, что сторонние силы в проводящей среде отсутствуют, уравнения для электрического поля можно написать в виде

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0,$$
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=\mathrm{div}\,\sigma\boldsymbol{E}=0.$$

В однородной среде, при $\sigma=\mathrm{const}$, последнее выражение приобретает вид

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0.$$

Вводя потенциал поля φ, находим, что он удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi=0. \tag{16,1}$$

На поверхности проводников выполняются граничные условия (14,5) и (14,7). Их можно записать, введя потенциал φ. Именно, условие (14,5) для непрерывности тангенциальной слагающей поля непосредственно переходит в условие смыкания потенциала на поверхности раздела:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{16,2}$$

Равенство нормальных компонент плотности тока $j_n = \sigma E_n$ дает

$$\sigma^{(1)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = \sigma^{(2)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2, \tag{16,3}$$

где n — нормаль к поверхности раздела.

Мы видим, что уравнение для потенциала и совокупность граничных условий, определяющие распределение тока в проводящей среде, идентичны с соответствующими выражениями § 8, определяющими распределение электростатического поля в двух диэлектрических средах. Единственное отличие заключается в том, что вместо диэлектрических проницаемостей ε_1 и ε_2 в граничном условии (16,3) стоят электропроводности сред $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$.

Поэтому потенциал в проводящей среде определяется формулами электростатики с заменой ε на σ.

Рассмотрим случай двух электродов в бесконечной среде. Ток, текущий с электрода, напишем в виде

$$I = \oint j\, dS = \oint j_n\, dS = \sigma \oint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_S dS.$$

Вводя электростатическую емкость по формуле (8.13), находим

$$I = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{4\pi}\oint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_S dS\right) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_1} C\varphi_1.$$

Полное сопротивление равно

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{\varphi_1}{I} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi\sigma}\cdot\frac{1}{C}. \tag{16,4}$$

Последняя формула позволяет формально выразить сопротивление системы через емкость аналогичной по геометрическим характеристикам электростатической системы проводников.

В виде примера можно рассмотреть систему из двух шаровых электродов, погруженных в бесконечную среду. Мы будем предполагать, что радиусы электродов a и b малы по сравнению с расстояниями между их центрами.

Решение уравнения Лапласа для двух таких сфер имеет вид

$$\varphi = \frac{a}{r_1}\varphi_a - \frac{b}{r_2}\varphi_b,$$

где φ_a и φ_b — потенциалы на поверхностях сфер, а r_1 и r_2 — расстояния до центров сфер.

Полный ток на поверхность первой сферы равен

$$I = \oint \sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} dS \approx 4\pi a\sigma\varphi_a,$$

если пренебречь вторым членом в φ, который при $r = a$ мал по сравнению с первым. Аналогично полный ток на вторую сферу оказывается равным

$$I = -4\pi b\sigma\varphi_b.$$

Сопротивление

$$R = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{I} \approx \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Таким образом, решение задачи о пространственном распределении тока сводится к решению соответствующей электростатической задачи.

Следует, однако, сделать важную оговорку. Если проводник частично граничит с проводящей, а частично с непроводящей средой, формальная аналогия с электростатикой теряет смысл. Действительно, в непроводящей среде $\sigma = 0$, между тем как в электростатике не бывает тел с диэлектрической проницаемостью, равной нулю.

Получим еще одно полезное для дальнейшего соотношения между плотностью тока и полным током в общем случае нелинейного проводника. Пусть по некоторому проводнику течет ток, плотность которого распределена по сечению неравномерно. Разобьем проводник на как угодно тонкие трубки с током. Соленоидальный характер постоянного тока позволяет всегда произвести такое разбиение. Каждую трубку с током можно считать линейным проводником, и мы можем для нее написать

$$dI = j_\alpha dS_\alpha, \tag{16,5}$$

где индекс α означает номер трубки.

Если бы плотность тока была распределена по сечению равномерно, можно было бы написать, очевидно,

$$\frac{dI_\alpha}{I} = \frac{dS_\alpha}{S}, \tag{16,6}$$

где I и S — полный ток и сечение проводника соответственно. При неравномерном распределении тока всегда можно положить

$$\frac{dI_\alpha}{I} = \frac{dS_\alpha}{S}\psi = \text{const (вдоль длины проводника)}, \qquad (16,7)$$

где функция ψ характеризует неравномерность в распределении тока по сечению. Поэтому при любом распределении тока имеем

$$\boldsymbol{j} = I\frac{\psi}{S}\boldsymbol{l}, \qquad (16,8)$$

где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор, направленный вдоль линии тока.

Последнее равенство имеет простой смысл: хотя распределение плотности тока определяется физическими свойствами проводника и его геометрией, плотность тока при прочих равных условиях пропорциональна полному току.

§ 17. Магнитное поле постоянных токов. Закон Био — Савара

Зная распределение плотности тока и интегрируя уравнения (14,3), можно найти распределение магнитного поля. Вводя в (14,3) вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, по формуле (4,19) получаем уравнение

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \qquad (17,1)$$

Для однородной и изотропной бесконечной среды, характеризуемой постоянной магнитной проницаемостью μ, можно написать

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}. \qquad (17,2)$$

Решение последнего уравнения

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{c}\int\boldsymbol{j}\frac{dV}{r} \qquad (17,3)$$

лишь множителем μ отличается от решения уравнения (19,13) части I для вектора-потенциала в пустоте.

Поскольку вне проводников плотность тока $\boldsymbol{j}$ равна нулю, фактически интегрирование можно проводить лишь по объему проводников. При этом, однако, мы считаем, что μ имеет одно и то же значение как в веществе проводников, так и в окружающей их среде. Если система не содержит ферромагнитных тел, то фактическое значение μ мало отличается от единицы. Поэтому приближенно можно считать μ имеющим одинаковое значение во всем пространстве. При наличии ферромагнетиков формула (17,3) теряет смысл.