где I и S — полный ток и сечение проводника соответственно. При неравномерном распределении тока всегда можно положить

$$\frac{dI_a}{I}=\frac{dS_a}{S}\psi=\text{const (вдоль длины проводника)},\qquad(16,7)$$

где функция ψ характеризует неравномерность в распределении тока по сечению. Поэтому при любом распределении тока имеем

$$\boldsymbol{j}=I\frac{\psi}{S}\boldsymbol{l},\qquad(16,8)$$

где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор, направленный вдоль линии тока.

Последнее равенство имеет простой смысл: хотя распределение плотности тока определяется физическими свойствами проводника и его геометрией, плотность тока при прочих равных условиях пропорциональна полному току.

§ 17. Магнитное поле постоянных токов. Закон Био — Савара

Зная распределение плотности тока и интегрируя уравнения (14,3), можно найти распределение магнитного поля. Вводя в (14,3) вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, по формуле (4,19) получаем уравнение

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}.\qquad(17,1)$$

Для однородной и изотропной бесконечной среды, характеризуемой постоянной магнитной проницаемостью μ, можно написать

$$\Delta\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}.\qquad(17,2)$$

Решение последнего уравнения

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{c}\int\boldsymbol{j}\frac{dV}{r}\qquad(17,3)$$

лишь множителем μ отличается от решения уравнения (19,13) части I для вектора-потенциала в пустоте.

Поскольку вне проводников плотность тока $\boldsymbol{j}$ равна нулю, фактически интегрирование можно проводить лишь по объему проводников. При этом, однако, мы считаем, что μ имеет одно и то же значение как в веществе проводников, так и в окружающей их среде. Если система не содержит ферромагнитных тел, то фактическое значение μ мало отличается от единицы. Поэтому приближенно можно считать μ имеющим одинаковое значение во всем пространстве. При наличии ферромагнетиков формула (17,3) теряет смысл.

В случае линейных проводников формулу (17,3) можно существенно упростить, написав, в силу постоянства полного тока I по сечению линейного проводника,

$$A=\frac{\mu}{c}\int j\frac{dV}{r}=\frac{\mu}{c}\int\frac{j\,dS\,dl}{r}=\frac{\mu I}{c}\int\frac{dl}{r}. \qquad (17,4)$$

В формуле (17,4) μ означает магнитную проницаемость среды, внешней по отношению к проводнику с током. Мы видим, что из (17,4) выпали все характеристики самого линейного проводника, например распределение плотности тока в нем, и он рассматривается как чисто геометрический объект. Поэтому свойства линейного проводника, в том числе и магнитные свойства вещества провода, не сказываются на величине магнитного поля. Формула (17,4) справедлива для любых, в том числе ферромагнитных, проводников.

Из определения вектора-потенциала следует, что магнитная индукция линейного проводника с током I равна (ср. с (19,15) ч. I)

$$B=\operatorname{rot}A=\frac{\mu I}{c}\operatorname{rot}\int\frac{dl}{r}=\frac{\mu I}{c}\int\operatorname{rot}\frac{dl}{r}=$$
$$=\frac{I\mu}{c}\int\left[\operatorname{grad}\frac{1}{r},\ dl\right]=\frac{I\mu}{c}\int\frac{[dl,\ r]}{r^3}. \qquad (17,5)$$

Формула (17,5) выражает закон Био и Савара в однородной и изотропной среде. Индукция (среднее поле) B оказывается в μ раз большей, чем поле такого же тока в пустоте. Соответственно напряженность поля в среде $H=\frac{B}{\mu}$ совпадает с полем в пустоте.

Часто закон Био и Савара пишут в дифференциальной форме, т. е. в виде

$$dB=\frac{\mu I}{c}\frac{[dl,\ r]}{r^3}, \qquad (17,6)$$

где dB — вклад, вносимый в индукцию элементом тока dl. Нужно иметь в виду, что (17,5) нельзя однозначно разложить на элементы (17,6). К (17,6) всегда можно прибавить векторную функцию, обращающуюся в нуль при интегрировании по замкнутому контуру с постоянным током.

В виде примера применения полученных формул вычислим магнитное поле, создаваемое в окружающем пространстве током, текущим в прямом бесконечном линейном проводнике.

Из соображений симметрии ясно, что это поле направлено по касательным к окружностям, концентричным к проводнику. Пусть угол между проводником и радиусом-вектором равен α

(рис. 88). Закон Био — Савара в применении к рассматриваемому случаю дает

$$B=\frac{\mu I}{c}\int\frac{[dl,\ n]}{r^2},$$

где $n=\frac{r}{r}$. Вводя кратчайшее расстояние от точки наблюдения до проводника ρ, имеем для компоненты поля B_ψ, направленной по касательной к окружности радиуса ρ, концентрической к проводнику:

$$B_\psi=\frac{\mu I}{c}\int\frac{\cos^2\alpha}{\rho^2}\sin(90^\circ-\alpha)\,dl=\frac{\mu I}{c\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha=\frac{2\mu I}{c\rho},\qquad(17{,}7)$$

где было положено (рис. 88)

$$r\cos\alpha=\rho,$$

$$\sin(90^\circ-\alpha)\,dl=r\,d\alpha=\frac{\rho\,d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Вычислим, далее, магнитное поле плоского кругового контура с током радиуса a на центральной оси z, перпендикуляр-

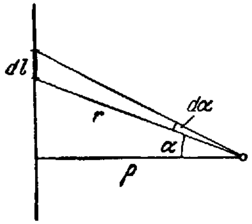

Рис. 88.

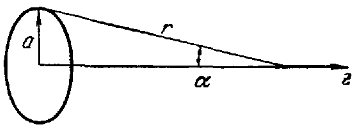

Рис. 89.

ной к плоскости, в которой лежит проводник с током (рис. 89). В этом случае можно написать для компонент поля

$$B_z=\frac{\mu I}{c}\oint\frac{[dl,\ r]_z}{r^3}=\frac{\mu I}{c}\int\frac{dl\sin\alpha}{r^2}=\frac{\mu I\cos^2\alpha\sin\alpha}{cz^2}\cdot 2\pi a.$$

Поскольку (рис. 89)

$$\cos\alpha=\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}},$$

находим окончательно

$$B_z=\frac{2\mu I}{c}\frac{S}{(z^2+a^2)^{3/2}},\qquad(17{,}8)$$

где S — площадь окружности, образуемой током.

В частности, на большом расстоянии от проводника ($z \gg a$)

$$B_z = \frac{2\mu IS}{cz^3} = \frac{2\mu M_z}{z^3}, \qquad (17,9)$$

где проекция магнитного момента тока M_z равна $\frac{IS}{c}$ (см. § 22 ч. I).

В центре окружности плоскости $z=0$

$$B_z = \frac{2\mu I}{ca^3}. \qquad (17,10)$$

Компонента поля $B_\perp$, перпендикулярная оси z, равна нулю, как это ясно из соображений симметрии — противоположным участкам контура с током будут отвечать значения B_z с противоположными знаками.

Отыскание магнитного поля в нелинейных проводниках с постоянным током представляет сложную в математическом отношении задачу. Вычисление вектора-потенциала по общей формуле (17,3) удается провести до конца лишь для отдельных случаев. Мы ограничимся поэтому некоторыми примерами. Весьма простым является нахождение магнитного поля бесконечного проводника с током цилиндрического сечения радиуса a. В этом случае можно провести интегрирование уравнения (14,3) непосредственно.

Благодаря цилиндрической симметрии магнитное поле как внутри, так и вне проводника имеет только компоненту H_ψ Интегрирование (14,3) по площади окружности радиуса $\rho<a$ дает

$$2\pi\rho H_\psi = \frac{4\pi}{c} jS,$$

где $S=\pi\rho^2$. Последнюю формулу можно представить в виде

$$H_\psi = \frac{2I}{c}\frac{\rho}{a^2} \quad (\rho<a). \qquad (17,11)$$

или, в векторном виде,

$$\boldsymbol{H} = \frac{2I}{ca^2}[\boldsymbol{l}\rho] = \frac{2\pi j}{c}[\boldsymbol{l}\rho], \qquad (17,12)$$

где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор вдоль образующей цилиндра. Вне проводника аналогично

$$H_\psi = \frac{2I}{c\rho} \quad (\rho>a). \qquad (17,13)$$

Если сечение проводника имеет более сложную форму, то иногда полезным оказывается использование принципа суперпозиции полей.

Напишем еще выражение для вектора Пойнтинга в случае линейного проводника с постоянным током.

По определению вектор Пойнтинга

$$\sigma = \frac{c}{4\pi}[EH]_{r=a},$$

где a — радиус проводника. Пользуясь (16,1), имеем

$$\sigma = \frac{c}{4\pi}\left[\frac{j}{\sigma} - E^{\text{стор}},\ H\right] = \frac{c}{4\pi\sigma}[jH] - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right].$$

В линейном проводнике вектор j направлен по оси проводника, вектор H — по касательной к концентрическим окружностям. Поэтому мы можем написать

$$\sigma = n\frac{c}{4\pi\sigma}jH_{r=a} - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right],$$

где n — единичный вектор, направленный внутрь проводника. Пользуясь (17,7), находим

$$\sigma = n\frac{j^2 a}{2\sigma} - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right].$$

В той части проводника, где сторонние силы отсутствуют, энергия втекает в проводник. При этом полный поток энергии на длине L

$$\int \sigma\, dS = j^2\frac{\pi a^2 L}{\sigma} = \frac{j^2}{\sigma}V,$$

т. е. равен полному джоулевому теплу, выделяющемуся в проводнике.

Таким образом, диссипируемая в проводнике энергия поставляется внешним электромагнитным полем. Напротив, на тех участках проводника, где действуют сторонние силы, вектор Пойнтинга направлен наружу. Поток энергии, создаваемый сторонними силами, вытекает в окружающее пространство. Как мы видели в § 15, полное количество энергии, диссипируемое в проводнике, равно энергии, отдаваемой источниками сторонних сил.

§ 18. Намагничение магнетиков и магнитный момент

Перейдем теперь к рассмотрению магнитных свойств вещества.

Если некоторая система частиц помещена во внешнее магнитное поле, то в ней возникает намагничение. Средний магнитный момент системы может быть определен таким же соотношением, что и средний дипольный момент:

$$M = kT\frac{\partial}{\partial H}\ln Z = -\frac{\partial F}{\partial H}, \tag{18,1}$$

где H — напряженность внешнего магнитного поля.