По определению вектор Пойнтинга

$$\sigma = \frac{c}{4\pi}[EH]_{r=a},$$

где a — радиус проводника. Пользуясь (16,1), имеем

$$\sigma = \frac{c}{4\pi}\left[\frac{j}{\sigma} - E^{\text{стор}},\ H\right] = \frac{c}{4\pi\sigma}[jH] - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right].$$

В линейном проводнике вектор j направлен по оси проводника, вектор H — по касательной к концентрическим окружностям. Поэтому мы можем написать

$$\sigma = n\frac{c}{4\pi\sigma}jH_{r=a} - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right],$$

где n — единичный вектор, направленный внутрь проводника. Пользуясь (17,7), находим

$$\sigma = n\frac{j^2a}{2\sigma} - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right].$$

В той части проводника, где сторонние силы отсутствуют, энергия втекает в проводник. При этом полный поток энергии на длине L

$$\int \sigma\, dS = j^2\frac{\pi a^2 L}{\sigma} = \frac{j^2}{\sigma}V,$$

т. е. равен полному джоулевому теплу, выделяющемуся в проводнике.

Таким образом, диссипируемая в проводнике энергия поставляется внешним электромагнитным полем. Напротив, на тех участках проводника, где действуют сторонние силы, вектор Пойнтинга направлен наружу. Поток энергии, создаваемый сторонними силами, вытекает в окружающее пространство. Как мы видели в § 15, полное количество энергии, диссипируемое в проводнике, равно энергии, отдаваемой источниками сторонних сил.

§ 18. Намагничение магнетиков и магнитный момент

Перейдем теперь к рассмотрению магнитных свойств вещества.

Если некоторая система частиц помещена во внешнее магнитное поле, то в ней возникает намагничение. Средний магнитный момент системы может быть определен таким же соотношением, что и средний дипольный момент:

$$M = kT\frac{\partial}{\partial H}\ln Z = -\frac{\partial F}{\partial H}, \qquad (18,1)$$

где H — напряженность внешнего магнитного поля.

Соответственно можно написать выражение для изменения свободной энергии:

$$dF = dF_0 - M\,dH.$$

Можно также ввести термодинамический потенциал Гиббса

$$d\Phi = d\Phi_0 - M\,dH. \qquad (18,2)$$

Их смысл аналогичен соответствующим величинам для электрического поля (см., однако, § 28).

Мы не будем останавливаться на разборе явлений магнитострикции и магнитокалорического эффекта. Они также аналогичны электрическим эффектам, рассмотренным в предыдущем параграфе.

Магнитная восприимчивость может быть вычислена по формуле

$$\chi = \frac{|M|}{|H|} = \frac{kT}{V}\,\frac{1}{|H|}\left|\frac{\partial \ln Z}{\partial H}\right|. \qquad (18,3)$$

В зависимости от знака χ различают диамагнитные ($\chi<0$) и парамагнитные ($\chi>0$) вещества. Кроме диа- и парамагнитных веществ имеется особая группа ферромагнитных тел, у которых магнитная восприимчивость чрезвычайно велика и резко зависит от магнитного поля.

У диамагнитных веществ магнитная восприимчивость обычно очень мала по абсолютной величине ($\chi \sim 10^{-6}$) на грамм-моль и не зависит от температуры. Диамагнитными являются все инертные газы и большая часть газов, молекулы которых представляют насыщенные химические соединения, почти все органические соединения, все простые изоляторы и примерно половина металлов (Cu, Ag, Au, Hg, Zn и др.). Среди последних встречаются так называемые аномальные диамагнетики, у которых восприимчивость в 10—100 раз превышает указанное выше нормальное значение и имеет ряд других аномальных свойств (например, зависит от температуры и от поля, как у Bi и Sb).

У нормальных парамагнетиков магнитная восприимчивость зависит от температуры по закону:

$$\chi = \frac{\text{const}}{T}.$$

По порядку величины χ составляет около 10^{-4}—10^{-6} на грамм-моль. К таким парамагнитным веществам принадлежат некоторые газы (O_2, NO, CO_2 и т. п.), кристаллогидраты солей редких земель (например, $Gd_2SO_4 \cdot 8H_2O$), соли металлов группы платины, железа и т. д. У многих нормальных парамагнетиков зависимость χ от температуры имеет вид

$$\chi = \frac{\text{const}}{T \pm \Delta},$$

где Δ — постоянная. Другую группу парамагнитных веществ составляют парамагнитные металлы, обладающие небольшой ($\chi = 10^{-6}$—10^{-7} на грамм-моль) парамагнитной восприимчивостью, не зависящей от температуры. Существуют так называемые аномальные парамагнетики, у которых парамагнитная восприимчивость зависит от поля (метамагнетики) или имеет максимальное значение при некоторой температуре (антиферромагнетики).

Наконец, тела с очень большой (по порядку величины достигающей 10^3) положительной восприимчивостью, сложным образом зависящей от напряженности магнитного поля, а также температуры и ряда других факторов, составляют группу ферромагнетиков.

Мы не можем здесь подробно осветить все стороны современного учения о магнитных свойствах вещества. Ограничимся только некоторыми общими замечаниями и изложением теории парамагнетизма нормальных парамагнетиков. Теория диамагнитных свойств атомов будет обоснована в гл. IX, ч. V.

Прежде чем перейти к изложению современной теории магнитных свойств вещества, необходимо кратко остановиться на одном, кажущемся на первый взгляд весьма парадоксальным, утверждении. Именно, можно в самом общем виде доказать, что магнитный момент любого тела, вычисленный с помощью законов классической статистики, тождественно равен нулю. Приведем простейшее доказательство этой теоремы.

Любую систему во внешнем поле можно представить как совокупность движущихся заряженных частиц. Как известно из электродинамики, при движении заряженной частицы в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z, обобщенный импульс частицы имеет вид (§ 41, ч. I)

$$p_x = p_x^{(0)} - \frac{eHy}{2c}, \quad p_y = p_y^{(0)} + \frac{eHx}{2c}, \quad p_z = p_z^{(0)},$$

где $p_x^{(0)}$, $p_y^{(0)}$, $p_z^{(0)}$ — компоненты импульса в отсутствие поля.

Функция Гамильтона дается выражением (41,8) ч. I:

$$H = \frac{\left(p_x + \frac{eHy}{2c}\right)^2 + \left(p_y - \frac{eHx}{2c}\right)^2 + p_z^2}{2m}.$$

Функция состояний системы в магнитном поле имеет вид

$$Z = \left\{ \int e^{-\frac{H}{kT}} \frac{dp\,dV}{h^3} \right\}^N.$$

Вводя вместо p_x новую переменную

$$p'_x = p_x^{(0)} = p_x + \frac{eHy}{2c},$$

мы видим, что после интегрирования по p'_x от минус бесконечности до плюс бесконечности функция состояний оказывается не зависящей от внешнего поля $\boldsymbol{H}$. То же относится и к p_y. В силу (18,3) средний магнитный момент тождественно равен нулю.

Полученный результат кажется особенно парадоксальным потому, что в большинстве книг приводится классическое объяснение диа- и парамагнетизма. Диамагнитные свойства вещества связываются с изменением орбитального движения электронов в атоме, вызванным магнитным полем. Как известно, в замкнутом электрическом контуре магнитное поле индуцирует ток, текущий в таком направлении, что возникающее дополнительное магнитное поле тока ослабляет приложенное поле. Индуцированный магнитный момент тока направлен против поля и пропорционален напряженности последнего, а также площади, охватываемой контуром. Считая электрон, движущийся в атоме, некоторым контуром с током, можно получить следующее чисто электродинамическое выражение для магнитного момента частицы, движущейся по орбите радиуса r_0:

$$\mu = -\frac{e^2}{6mc^2} r_0^2 H.$$

Что же касается парамагнетизма, то он в классической электродинамике связывается с наличием магнитного момента у электрона, движущегося по орбите и имеющего отличный от нуля механический момент. Если L означает механический момент системы, то в классической электродинамике показывается, что система обладает магнитным моментом

$$\mu = \frac{e}{2mc} L. \tag{18,4}$$

Магнитный момент, определенный формулой (18,4), является аналогом электрического дипольного момента. Каждый атом является как бы маленьким магнитиком. Поэтому к нему полностью применимы рассуждения и формула (18,1). В атомном газе, атомы которого обладают магнитным моментом μ, должен возникать средний магнитный момент вследствие появления преимущественной ориентации магнитных моментов вдоль поля.

Непоследовательность подобных рассуждений состоит в том, что в них заранее принимается существование стабильных электронных орбит. Между тем хорошо известно, что на основе классических представлений невозможно понять самое существование стабильных орбит. Отсутствие магнитного момента в классической физике является выражением факта отсутствия стабильного движения в системе элементарных зарядов. Предположения о существовании стационарных орбит электронов в атомах или фиксированных моментов у атомов, используемые в «классической» теории магнетизма, представляют по существу предположения о квантовании состояний, которые делаются в неявном виде.

В квантовой механике доказывается, что уровни энергии атомной системы, помещенной в магнитное поле, изменяются. В случае атомов или ионов, у которых среднее значение механического момента L системы равно нулю, для энергии нормального состояния получается следующее выражение (см. гл. IX ч. V):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{e^2H^2}{12mc^2}\sum\left(r_i^2\right)_{\text{ср}}, \tag{18,5}$$

где ε_0 — значение энергии в нормальном состоянии и $\left(r_i^2\right)_{\text{ср}}$ — квантово-механическое среднее радиуса-вектора i-го электрона в нормальном состоянии. Суммирование ведется по всем электронам в атоме. Этой энергии отвечает средний магнитный момент

$$\mu_{\text{ср}} = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial H} = -\frac{e^2H}{6mc^2}\sum\left(r_i^2\right)_{\text{ср}}. \tag{18,6}$$

Формула (18,6) по форме совпадает с приведенной выше классической формулой, но имеет иной смысл: величина $(r^2)_{\text{ср}}$ представляет квантовомеханическое среднее (см. гл. III ч.V).

В нормальном состоянии атом или ион приобретает диамагнитную восприимчивость

$$\chi_0 = -\frac{e^2}{6mc^2}\sum\left(r_i^2\right)_{\text{ср}}. \tag{18,7}$$

Подчеркнем, что никакого усреднения по различным состояниям в (18,7) не производится и усреднение не имеет ничего общего со статистическим усреднением.

Система, представляющая собрание N независимых атомов или инов, будет обладать в нормальном состоянии индуцированным магнитным моментом

$$M = -\frac{Ne^2H}{6mc^2}\sum\left(r_i^2\right)_{\text{ср}}$$

и диамагнитной восприимчивостью

$$\chi = -\frac{Ne^2}{6mc^2}\sum\left(r_i^2\right)_{\text{ср}}. \tag{18,8}$$

Если подставить для $(r^2)_{ср}$ значения, вычисленные различными методами (об этих методах см. ч. V), или средние радиусы атомов, полученные из кинетической теории газов, то для χ получается значение, согласующееся с найденными из измерений.

Если система (атом или ион) в нормальном состоянии обладает отличным от нуля механическим моментом, то энергия в магнитном поле будет иметь иной вид.

Именно, в квантовой механике показывается, что если некоторая молекулярная система обладает орбитальным моментом количества движения L, то энергия ее в некотором состоянии i равна

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} L_z H + \frac{e^2 H^2}{6mc^2} \sum (r_i^2)_{ср}, \tag{18,9}$$

где L_z — проекция механического момента на направление магнитного поля (ось z выбрана вдоль поля). Вывод (18,9) см. в гл. IX ч. V.

Простые оценки показывают, что последний член в формуле (18,9) при всех значениях напряженности поля H мал по сравнению со вторым членом. Исключение составляют очень большие органические молекулы, у которых $\sum (r_i^2)_{ср}$ весьма велико.

В дальнейшем мы будем опускать последний член в (18,9) и писать энергию в виде

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} L_z H. \tag{18,10}$$

В квантовой механике показывается (см. гл. III ч. V), что проекция механического момента на ось z принимает дискретный ряд значений:

$$L_z = -L, \quad -L+1, \ldots, 0, 1, \ldots, L-1, L$$

(всего $2L+1$ значений). Поэтому в магнитном поле i-й уровень энергии распадается на $(2L+1)$ уровней, обладающих энергиями

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + \frac{eh}{4\pi mc} LH;$$

$$\varepsilon_i^{(0)} + \frac{eh}{4\pi mc} (L-1) H, \ \ldots; \quad \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} (L-1) H; \quad \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} LH.$$

Наличие у системы электронов помимо механического момента, обусловленного орбитальным движением, спинового механического момента приводит к появлению у системы спинового магнитного момента. Если результирующий спин системы S отличен от нуля, а результирующий орбитальный момент L

равен нулю, энергия системы в магнитном поле оказывается равной (см. гл. VIII ч. V)

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{2\pi mc} S_z H, \tag{18,11}$$

где S_z — проекция спинового момента на направление поля, принимающая дискретный ряд значений:

$$S_z = -S, \ -S+1, \ \ldots, \ (S-1), \ S.$$

У подобной системы i-й уровень распадается на $(2S+1)$ подуровней:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + \frac{eh}{2\pi mc} SH, \ \ldots, \ \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{2\pi mc} SH. \tag{18,12}$$

Общий случай, когда L и S отличны от нуля одновременно, мы рассматривать не будем.

В магнитном поле система, находящаяся в i-м состоянии, будет обладать средним (в квантовомеханическом смысле) магнитным моментом

$$(\mu_i)_{\text{ср}} = -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H} = \frac{eh}{4\pi mc} L_z \tag{18,13}$$

или

$$(\mu_i)_{\text{ср}} = -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H} = \frac{eh}{2\pi mc} S_z. \tag{18,14}$$

Мы видим, что магнитный момент системы имеет положительный знак, т. е. что система, имеющая собственный механический момент, является парамагнитной. Отношение магнитного момента к орбитальному механическому равно $\frac{eh}{4\pi mc}$. Для спинового момента это отношение вдвое больше.

§ 19. Парамагнитная восприимчивость

Рассмотрим теперь поведение системы, содержащей большое число атомов или молекул во внешнем магнитном поле. Магнитное поле оказывает ориентирующее влияние на магнитные моменты атомов, стремясь установить их вдоль поля. Тепловое движение расстраивает правильное расположение моментов. В результате конкуренции этих процессов устанавливается некоторое среднее распределение ориентаций магнитных моментов относительно направления поля. Этому среднему распределению элементарных магнитных моментов отвечает средний магнитный момент всей системы.

Найдем результирующий магнитный момент системы атомов по общей формуле. При этом будем считать, что взаимодей-