ГЛАВА IV

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

§ 22. Условия квазистационарности

Мы перейдем теперь к изучению электромагнитных полей переменных во времени. Оказывается, что при этом существует широкий интервал частот изменения полей, в котором уравнения Максвелла допускают существенное упрощение.

В § 19 ч. I мы рассмотрели случай медленного движения зарядов, когда можно было полностью пренебречь запаздыванием в системе и считать электромагнитное поле распространяющимся с бесконечно большой скоростью.

В основании результатов § 26 ч. I условие пренебрежения запаздыванием сводится к требованию

$$T \gg \tau = \frac{L}{c}, \tag{22,1}$$

где T — период движения в системе, а τ — время запаздывания, L — геометрическая протяженность той области, в которой рассматриваются электромагнитные возмущения.

В макроскопической электродинамике существует ряд важнейших проблем, при рассмотрении которых можно считать условие (22,1) выполненным. В приближении (22,1) в пределах рассматриваемой системы можно считать скорость распространения электромагнитных возмущений бесконечно большой. Значения полей в данной точке будут при этом находиться в одной фазе с их значениями в любой другой точке внутри системы. Ясно, что возможность пренебрегать запаздыванием в системе существенно упрощает изучение соответствующих электромагнитных полей.

Электромагнитные поля, в которых можно пренебрегать явлением запаздывания, мы называли в ч. I квазистационарными. При изучении электромагнитных явлений в веществе квазистационарные поля, помимо требования (22,1), которое мы будем называть первым условием квазистационарности, должны удовлетворять еще двум ограничениям, к выводу которых мы и перейдем.

Условие (22,1) накладывает, очевидно, некоторое ограничение на период изменения электромагнитного поля T (или частоту $\omega = \frac{2\pi}{T}\big)$. Именно, периоды T должны быть достаточно велики (а частоты — низки) при данном размере системы.

При сравнительно малых частотах изменения электромагнитного поля в проводниках всегда выполняется условие

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \gg \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{22,2}$$

Действительно, его можно переписать в виде

$$\sigma \boldsymbol{E} \gg \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \approx \varepsilon\omega \boldsymbol{E},$$

или

$$T \gg \frac{\varepsilon}{\sigma}. \tag{22,3}$$

При выполнении неравенства (22,2), которое следует называть вторым условием квазистационарности, в области пространства, занятой проводниками, можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости.

Третьим условием квазистационарности является требование, чтобы величины, характеризующие свойства вещества — σ, ε и μ, имели такое же значение, что и в постоянных полях. Мы увидим в части VI, что первое требование сводится к тому, что период T должен быть существенно больше, чем время свободного пробега электронов в металле:

$$T \gg \frac{\lambda}{\bar{v}}, \tag{22,4}$$

где λ — средняя линия свободного пробега и $\bar{v}$ — средняя скорость электронов в металле. При меньших значениях T за время свободного пробега электрона поле успеет изменить свое значение, что отразится, очевидно, на величине пробега, и, в конечном счете, на значении σ.

Зависимость ε от частоты внешнего поля будет рассмотрена нами ниже.

Числовые оценки показывают, что условия квазистационарности для обычных макроскопических систем, содержащих в качестве проводников металлы, выполняются вплоть до частот, лежащих в инфракрасной части спектра. Совокупность условий, определяющих квазистационарные поля, оказывается выполненной в широкой области явлений, объединяемых названием «переменные токи». Переменные токи или токи низкой частоты находят широчайшее применение в технике и лабораторной практике. Это определяет практическую важность теории квазистационарных процессов.

Уравнения квазистационарного электромагнитного поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{22,5}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{22,6}$$

В уравнении для ротора магнитного поля на основании (22,2) нами опущено слагаемое, выражающее ток смещения. При этом выполнены условия связи:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{j} = \sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}). \tag{22,7}$$

Уравнение непрерывности в случае квазистационарных полей можно представить в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{D}}{4\pi} = \operatorname{div} \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \approx \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{22,8}$$

Таким образом, отличие уравнений квазистационарного поля от поля стационарных токов сводится лишь к учету явлений электромагнитной индукции. Ниже будет показано, что возможность пренебрежения запаздыванием в системе позволяет получить уравнения электромагнитного поля для случая системы линейных проводников в виде уравнений в полных, а не в частных, производных и притом с постоянными коэффициентами.

Для этой цели необходимо перейти к уравнениям Максвелла в интегральной форме.

§ 23. Закон индукции в движущихся проводниках и средах

Прежде всего необходимо найти поток индукции, входящий в уравнения Максвелла, записанные в интегральной форме. При этом мы должны обобщить понятие потока индукции на случай движущихся контуров с током.

Пусть некоторый контур с током движется в магнитном поле. Скорость движения будем считать постоянной в пространстве и малой по сравнению со скоростью света c. Найдем изменение потока индукции через контур с проводником.

Имеем, очевидно,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}.$$