находят широчайшее применение в технике и лабораторной практике. Это определяет практическую важность теории квазистационарных процессов.

Уравнения квазистационарного электромагнитного поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{22,5}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{22,6}$$

В уравнении для ротора магнитного поля на основании (22,2) нами опущено слагаемое, выражающее ток смещения. При этом выполнены условия связи:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{j} = \sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}). \tag{22,7}$$

Уравнение непрерывности в случае квазистационарных полей можно представить в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{D}}{4\pi} = \operatorname{div} \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \approx \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{22,8}$$

Таким образом, отличие уравнений квазистационарного поля от поля стационарных токов сводится лишь к учету явлений электромагнитной индукции. Ниже будет показано, что возможность пренебрежения запаздыванием в системе позволяет получить уравнения электромагнитного поля для случая системы линейных проводников в виде уравнений в полных, а не в частных, производных и притом с постоянными коэффициентами.

Для этой цели необходимо перейти к уравнениям Максвелла в интегральной форме.

§ 23. Закон индукции в движущихся проводниках и средах

Прежде всего необходимо найти поток индукции, входящий в уравнения Максвелла, записанные в интегральной форме. При этом мы должны обобщить понятие потока индукции на случай движущихся контуров с током.

Пусть некоторый контур с током движется в магнитном поле. Скорость движения будем считать постоянной в пространстве и малой по сравнению со скоростью света c. Найдем изменение потока индукции через контур с проводником.

Имеем, очевидно,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}.$$

По определению

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{S}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{S_2}\boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S}-\int\limits_{S_1}\boldsymbol{B}(t)\,d\boldsymbol{S}}{\Delta t}, \tag{23,1}$$

где $\boldsymbol{B}(t+\Delta t)$ — вектор индукции, взятый в момент времени $t+\Delta t$ и S_2 — поверхность, в которую переходит поверхность S_1 в момент $t+\Delta t$. При этом векторы нормали к обеим поверхностям считаются ориентированными в одну сторону.

Применим теорему Гаусса — Остроградского к замкнутой поверхности, состоящей из (рис. 94) поверхностей S_2 и S_1 и боковой поверхности Σ, образовавшейся при смещении контура из положения S_1 в положение S_2. Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$, т. е. $\boldsymbol{B}$ — вектор, не имеющий источников, можно написать

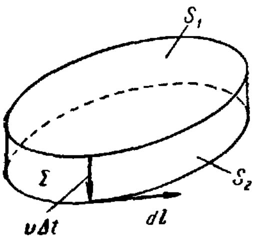

Рис. 94.

$$\oint \boldsymbol{B}(t+\Delta t)d\boldsymbol{S}=\int\limits_{S_2}\boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S}+$$

$$+\int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{\Sigma}-\int\limits_{S_1}\boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S}=0. \tag{23,2}$$

Здесь знак минус связан с нашим выбором ориентации вектора нормали. Для боковой поверхности Σ можно, очевидно, написать (см. рис. 94)

$$d\boldsymbol{\Sigma}=[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{v}]\,\Delta t,$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость движения контура с током и dl — элемент его длины. Поэтому

$$\int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{\Sigma}=\int \boldsymbol{B}\,[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{v}]\,\Delta t=\Delta t\oint[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,d\boldsymbol{l}, \tag{23,3}$$

где интеграл берется по кривой, ограничивающей поверхность S_1 (т. е. по контуру с током). Далее, с точностью до бесконечно малых второго порядка можно написать

$$\int\limits_{S_1}\boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S}\approx\int\limits_{S_1}\boldsymbol{B}(t)\,d\boldsymbol{S}+\Delta t\int\limits_{S_1}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}. \tag{23,4}$$

Из (23,3), (23,4) и (23,2) находим

$$\int\limits_{S_2}\boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S}\approx\int\limits_{S_1}\boldsymbol{B}(t)\,d\boldsymbol{S}+\Delta t\int\limits_{S_1}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}-\Delta t\oint[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,d\boldsymbol{l}.$$

Подставляя это выражение в (23,1) и переходя к пределу, находим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int B\,dS = \int\limits_{S_1}\frac{\partial B}{\partial t}dS - \oint [vB]\,dl. \qquad (23,5)$$

Формула (23,5) показывает, что изменение потока индукции через контур тока во времени может происходить либо вследствие изменения вектора индукции, либо при движении контура с током в заданном поле под углом к линиям поля не равным нулю (так что вектор скорости не параллелен B). Иными словами, если контур с током при своем движении пересекает линии вектора индукции B, то возникает изменение потока индукции Φ во времени.

Переходя во втором интеграле к интегрированию по поверхности, можем написать

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int\left\{\frac{\partial B}{\partial t} - \operatorname{rot}[vB]\right\}dS. \qquad (23,6)$$

Напишем теперь закон индукции Фарадея для движущегося контура с током в виде

$$\oint E\,dl = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (23,7)$$

где E — напряженность поля в линейном проводнике. Ясно, что в правой части (23,7) должно стоять полное изменение потока индукции, независимо от причины, вызывающей это изменение.

Непрерывность тангенциальной слагающей E позволяет перейти от линейного проводника к соседнему с ним контуру, лежащему в среде вне проводника. При этом можно уже говорить не о движении контура с током, а о движении среды. Скорость v означает при этом скорость движения данной точки среды. От (23,7) можно перейти к дифференциальному уравнению Максвелла в движущейся среде.

Именно, написав с помощью (23,5)

$$\oint E\,dl = \int \operatorname{rot} E\,dS = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial B}{\partial t}dS + \frac{1}{c}\int \operatorname{rot}[vB]\,dS,$$

имеем

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B}{\partial t} - \operatorname{rot}[vB]\right). \qquad (23,8)$$

Преобразуем выражение в скобках, написав на основании (I,45)

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \operatorname{rot}[vB] = \frac{\partial B}{\partial t} - (B\operatorname{grad})v + (v\operatorname{grad})B - v\operatorname{div}B + B\operatorname{div}v =$$
$$= \frac{\partial B}{\partial t} + (v\operatorname{grad})B = \frac{dB}{dt}$$

в силу (22,5) и постоянства v.

Тогда находим окончательно значение $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ в движущейся среде:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}. \tag{23,9}$$

Важность полученных результатов. и в частности закона индукции Фарадея в форме (23,7), связана с тем, что движение проводников в магнитном поле является на практике одним из основных методов возбуждения э. д. с. (например, в динамомашинах).

§ 24. Уравнения Максвелла для квазистационарных полей в интегральной форме и их интегрирование для случая линейных проводников

Мы можем теперь рассмотреть систему уравнений Максвелла для квазистационарных полей в интегральной форме, рассматривая общий случай движущихся сред:

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{24,1}$$

$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = 0, \tag{24,2}$$

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi I}{c}, \tag{24,3}$$

$$\oint \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi \int \rho\, dV. \tag{24,4}$$

Уравнение непрерывности запишется согласно (22,8) в виде

$$\oint \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S} = 0. \tag{24,5}$$

Рассмотрим случай линейных проводников с током. Для простоты мы ограничимся сперва одним проводником. Мы будем считать заданными сторонние э. д. с. в контуре; при этом величина э. д. с. может зависеть от времени. Напишем обобщенный закон Ома в интегральной форме в виде

$$\oint \boldsymbol{j}\frac{d\boldsymbol{l}}{\sigma} = \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l}. \tag{24,6}$$

Поскольку мы рассматриваем линейный контур и справедливо уравнение непрерывности, мы можем представить его с помощью (24,1), (15,4) и (15,6) в виде

$$IR = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} + \mathscr{E}(t). \tag{24,7}$$

Уравнение (24,7), связывающее ток в контуре с заданной сторонней э. д. с. $\mathscr{E}(t)$, называют обычно законом Ома для цепи переменного тока.