

Тогда находим окончательно значение $\text{rot } E$ в движущейся среде:

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{dB}{dt}. \quad (23,9)$$

Важность полученных результатов, и в частности закона индукции Фарадея в форме (23,7), связана с тем, что движение проводников в магнитном поле является на практике одним из основных методов возбуждения э. д. с. (например, в динамо-машинах).

§ 24. Уравнения Максвелла для квазистационарных полей в интегральной форме и их интегрирование для случая линейных проводников

Мы можем теперь рассмотреть систему уравнений Максвелла для квазистационарных полей в интегральной форме, рассматривая общий случай движущихся сред:

$$\oint E dl = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (24,1)$$

$$\oint B dS = 0, \quad (24,2)$$

$$\oint H dl = \frac{4\pi I}{c}, \quad (24,3)$$

$$\oint D dS = 4\pi \int \rho dV. \quad (24,4)$$

Уравнение непрерывности запишется согласно (22,8) в виде

$$\oint j dS = 0. \quad (24,5)$$

Рассмотрим случай линейных проводников с током. Для простоты мы ограничимся сперва одним проводником. Мы будем считать заданными сторонние э. д. с. в контуре; при этом величина э. д. с. может зависеть от времени. Напишем обобщенный закон Ома в интегральной форме в виде

$$\oint j \frac{dl}{\sigma} = \oint E dl + \oint E^{\text{стор}} dl. \quad (24,6)$$

Поскольку мы рассматриваем линейный контур и справедливо уравнение непрерывности, мы можем представить его с помощью (24,1), (15,4) и (15,6) в виде

$$IR = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} + \mathcal{E}(t). \quad (24,7)$$

Уравнение (24,7), связывающее ток в контуре с заданной стороной э. д. с. $\mathcal{E}(t)$, называют обычно законом Ома для цепи переменного тока.

Если перейти теперь к системе, состоящей из произвольного числа N контуров с переменным током, то для каждого из них можно написать

$$I_i R_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_i}{dt} + \mathcal{E}_i(t). \quad (24,8)$$

где Φ_i — поток индукции через i -й контур с проводником.

Магнитное поле определится из уравнений (24,2) и (24,3), не отличающихся от уравнений для постоянного тока. Поэтому для всех магнитных величин остаются в силе соотношения, полученные для постоянного тока. Однако уравнения для распределения магнитного поля и тока в цепи оказываются связанными между собой: поток магнитной индукции через i -й контур с током определяется распределением магнитного поля; распределение магнитного поля определяется токами во всех контурах.

Легко показать, однако, что в квазистационарных полях потоки индукции оказываются связанными с плотностями токов линейными соотношениями с постоянными коэффициентами типа

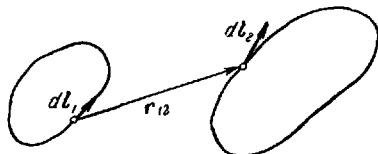


Рис. 95.

$$\Phi_i = c \sum_{k=1}^N L_{ik} I_k \quad (L_{ik} = L_{ki}). \quad (24,9)$$

Для доказательства рассмотрим простейший случай двух линейных контуров в среде с постоянной магнитной проницаемостью μ .

Ток во втором контуре (рис. 95) создает в первом контуре поток индукции

$$\Phi_1(2) = \mu \int \mathbf{H} d\mathbf{S}_1 = \int \text{rot } \mathbf{A}_2 d\mathbf{S}_1 = \oint \mathbf{A}_2 dl_1, \quad (24,10)$$

где индекс 1 относится к первому контуру.

Вектор-потенциал магнитного поля линейного проводника с током I_2 дается формулой (17,4). Поэтому

$$\Phi_1(2) = \frac{\mu I_2}{c} \oint \oint \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}} = c L_{12} I_2, \quad (24,11)$$

т. е. поток индукции в первом контуре, создаваемый током во втором контуре, пропорционален току I_2 в последнем. Коэффициент пропорциональности L_{12} оказывается постоянной, зависящей только от свойств среды и взаимного расположения контуров:

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}}, \quad (24,12)$$

где r_{12} — расстояние между элементами длины dl_1 и dl_2 . Величина L_{12} носит название коэффициента взаимной индукции.

Наряду с потоком магнитной индукции $\Phi_1(2)$ через первый контур с током проходит поток индукции, создаваемый током в самом контуре:

$$\Phi_1(1) = cL_{11}I_1. \quad (24,13)$$

Коэффициент пропорциональности L_{11} носит название коэффициента самоиндукции. В принципе происхождение коэффициента самоиндукции таково: поток магнитной индукции через некоторый участок провода получается суммированием потоков создаваемых другими его участками. При этом во всех участках провода течет ток I_1 .

Ясно, однако, что для вычисления коэффициента самоиндукции нельзя пользоваться формулой (24,12). При приближении участка dl_2 к участку dl_1 в том же проводнике $r_{12} \rightarrow 0$, и интеграл (24,12) расходится. Причина этой расходимости заключается в том, что если участок dl_2 близок к dl_1 , поперечные размеры проводника становятся сравнимыми с расстоянием r_{12} между этими участками. Это, в свою очередь, делает недопустимым использование формулы (19,4), найденной в приближении линейных проводников. Иными словами, при рассмотрении взаимоотношения между близкими участками одного проводника заведомо неверно приближение линейного проводника. В следующих параграфах мы увидим, как можно найти коэффициент самоиндукции, не прибегая к представлению о линейном характере проводника. Пока же мы можем написать полный поток магнитной индукции через первый проводник в виде

$$\Phi_1 = cL_{11}I_1 + cL_{12}I_2, \quad (24,14)$$

аналогично поток магнитной индукции через второй проводник

$$\Phi_2 = cL_{22}I_2 + cL_{21}I_1.$$

Легко показать, что имеет место равенство $L_{21} = L_{12}$. Действительно,

$$L_{21} = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{dl_2 dl_1}{r_{21}} = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}} = L_{12}. \quad (24,15)$$

Уравнение (24,7) обобщенного закона Ома в первом контуре приобретает вид

$$I_1 R_1 = -L_{11} \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} + \mathcal{E}_1(t). \quad (24,16)$$

Аналогичное выражение может быть написано для второго контура.

В общем случае произвольного числа контуров поток магнитной индукции через проводник i выражается по формуле (24,9) через токи во всех контурах, коэффициент самондукции L_{ii} и коэффициенты взаимной индукции L_{ik} . Подставляя (24,9) в закон Ома для цепи переменного тока, находим совокупность уравнений, определяющих ток I_i в каждом из N контуров:

$$I_i R_i = - \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} + \mathcal{E}_i(t) \quad (i = 1, 2 \dots N). \quad (24,17)$$

Если заданы сторонние э. д. с. \mathcal{E}_i и геометрические свойства системы линейных контуров, определяющих совокупность коэффициентов L_{ik} , интегрирование системы линейных дифференциальных уравнений (24,17) с постоянными коэффициентами позволяет определить токи I_i в контурах. Магнитные поля будут при этом определяться по формулам (24,2) и (24,3).

Таким образом, в соответствии со сказанным в конце § 22, уравнения квазистационарного электромагнитного поля в случае системы линейных проводников сводятся к уравнениям в полных производных с постоянными коэффициентами. Последние, однако, как это известно из общей теории дифференциальных уравнений, сводятся к системе алгебраических уравнений.

Плотности объемных зарядов, возникающих в некоторых случаях в проводниках, вычисляются обычно с помощью формулы (24,4) по заданному распределению электрического поля.

В качестве примера применений формул (24,11) и (24,12) вычислим коэффициент взаимной индукции двух прямых параллельных линейных проводников длины l . Для определенности будем считать токи в проводниках направленными в одну сторону. Обозначим расстояние между проводниками через h .

Тогда по формуле (24,12) имеем

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\mu}{c^2} \int \frac{dt_1 dt_2}{r_{12}} = \frac{\mu}{c^2} \int_0^l \int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2}} = \\ &= \frac{\mu}{c^2} \int_0^l dx_1 \ln \left\{ \frac{(l - x_1) + \sqrt{(l - x_1)^2 + h^2}}{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + h^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Вычисление второго интеграла несколько громоздко. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\mu}{c^2} \left\{ l \cdot \ln \left[\frac{h}{-l + \sqrt{l^2 + h^2}} \right] - 2(\sqrt{l^2 + h^2} - h) + \right. \\ &\quad \left. + l \cdot \ln \left[\frac{l}{-l + \sqrt{l^2 + h^2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Упростим найденное выражение для двух предельных случаев: когда провода находятся на расстоянии, удовлетворяющем неравенствам $h \ll l$ и $h \gg l$. В первом случае без труда находим с точностью до величин порядка $\left(\frac{h}{l}\right)^2$

$$L_{12} \approx \frac{2\mu l}{c^2} \left\{ \ln \frac{2l}{h} - 1 + \frac{h}{l} \right\}.$$

В обратном предельном случае с точностью до величин порядка $\frac{l^2}{h^2}$

$$L_{12} \approx \frac{\mu}{c^2} \frac{l^2}{h}.$$

Для сравнения разных методов вычисления L_{12} найдем коэффициент взаимной индукции двух кольцевых соленоидов, навитых на общий сердечник.

Диаметр кольца D (длину соленоида) будем считать большим по сравнению с диаметром витков. Магнитное поле внутри кольцевого соленоида можно считать однородными и написать

$$\oint \mathbf{H} \, dl = 2\pi D H = \frac{4\pi}{c} n_1 I_1,$$

где n_1 — число витков в первом соленоиде и I_1 — ток в нем. Отсюда

$$H = \frac{2n_1 I_1}{cD}. \quad (24,18)$$

Поток индукции через n_2 витков второго соленоида (в предположении, что утечки нет и все линии индукции магнитного поля, создаваемого первым соленоидом, пронизывают второй) будет равен

$$\Phi_{21} = \mu H n_2 S = \frac{2\mu n_1 n_2 S}{cD} I_1,$$

где S — сечение соленоида.

Из (24,11) находим

$$L_{21} = \frac{2\mu n_1 n_2 S}{c^2 D}.$$

§ 25. Энергия магнитного поля системы квазистационарных токов

Найдем энергию магнитного поля системы токов в приближении квазистационарных полей.

Как мы видели в § 7, полная энергия (точнее — свободная энергия) магнитного поля равна

$$T_{\text{магн}} = \int \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{8\pi} \, dV.$$