Упростим найденное выражение для двух предельных случаев: когда провода находятся на расстоянии, удовлетворяющем неравенствам $h \ll l$ и $h \gg l$. В первом случае без труда находим с точностью до величин порядка $\left(\frac{h}{l}\right)^2$

$$L_{12} \approx \frac{2\mu l}{c^2}\left\{\ln\frac{2l}{h} - 1 + \frac{h}{l}\right\}.$$

В обратном предельном случае с точностью до величин порядка $\frac{l^2}{h^2}$

$$L_{12} \approx \frac{\mu}{c^2}\frac{l^2}{h}.$$

Для сравнения разных методов вычисления L_{12} найдем коэффициент взаимоиндукции двух кольцевых соленоидов, навитых на общий сердечник.

Диаметр кольца D (длину соленоида) будем считать большим по сравнению с диаметром витков. Магнитное поле внутри кольцевого соленоида можно считать однородными и написать

$$\oint H\,dl = 2\pi DH = \frac{4\pi}{c} n_1 I_1,$$

где n_1 — число витков в первом соленоиде и I_1 — ток в нем. Отсюда

$$H = \frac{2n_1 I_1}{cD}. \qquad (24,18)$$

Поток индукции через n_2 витков второго соленоида (в предположении, что утечки нет и все линии индукции магнитного поля, создаваемого первым соленоидом, пронизывают второй) будет равен

$$\Phi_{21} = \mu H n_2 S = \frac{2\mu n_1 n_2 S}{cD} I_1,$$

где S — сечение соленоида.

Из (24,11) находим

$$L_{21} = \frac{2\mu n_1 n_2 S}{c^2 D}.$$

§ 25. Энергия магнитного поля системы квазистационарных токов

Найдем энергию магнитного поля системы токов в приближении квазистационарных полей.

Как мы видели в § 7, полная энергия (точнее — свободная энергия) магнитного поля равна

$$T_{\text{магн}} = \int \frac{BH}{8\pi}\,dV.$$

Интегрирование ведется по всему пространству. При этом предполагалось, что в объеме V нет ферромагнетиков.

Выражая $\boldsymbol{B}$ через вектор-потенциал и пользуясь первым из уравнений (22,5), имеем

$$\boldsymbol{BH} = \boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \mathrm{div}\,[\boldsymbol{AH}] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{Aj} + \mathrm{div}\,[\boldsymbol{AH}].$$

Поэтому

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{Aj}\,dV + \int \frac{\mathrm{div}[\boldsymbol{AH}]}{8\pi}\,dV. \qquad (25,1)$$

Последний интеграл при интегрировании по всему пространству обращается в нуль, и мы находим окончательно

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{Aj}\,dV. \qquad (25,2)$$

В формуле (25,2) $\boldsymbol{A}$ представляет вектор-потенциал, создаваемый в некоторой точке всеми токами, $\boldsymbol{j}$ — плотность тока в той же точке.

Интегрирование по всему пространству можно теперь заменить на интегрирование по объемам, занятым проводниками с током. Вне этих объемом $\boldsymbol{j} = 0$ и интеграл (25,2) исчезает. Поэтому

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{Aj}\,dv, \qquad (25,3)$$

где dv — элемент объема проводника.

Пусть во всей системе имеется N проводников. Разобьем интеграл (25,3) на две части, написав

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\sum_i \int \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{j}_i\,dv_i + \frac{1}{c}\sum_{k>i}\int \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{j}_i\,dv_i. \qquad (25,4)$$

В интеграле, входящем в первую сумму, $\boldsymbol{A}_i$ означает вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого в элементе объема dv_i данного проводника токами, имеющимися в других элементах того же самого проводника.

В интеграле во второй сумме $\boldsymbol{A}_k$ представляет вектор-потенциал поля, создаваемого в элементе объема dv_i токами во всех остальных проводниках. Следовательно, первая сумма представляет сумму собственных энергий всех N проводников. Вторая сумма дает взаимную энергию этих проводников.

Фактическое вычисление энергии $T_{\text{магн}}$ сталкивается с большими трудностями в случае проводников, находящихся в намагничивающейся среде. Поскольку магнитная проницаемость проводников, вообще говоря, отлична от проницаемости среды, для вычисления энергии токов по формуле (25,4) необходимо знать распределение вектора-потенциала в неоднородной среде. Нахождение последнего представляет большие трудности. Мы ограничимся поэтому случаем, когда $\mu \approx \mu_0 \approx 1$ как в веществе проводников, так и в окружающей их среде. Иными словами, проводники вместе с окружающей их средой будем считать квазиоднородной системой. При этом вектор-потенциал в любой точке пространства дается формулой (17,4).

Подставляя (17,4) в (25,4), находим

$$T_{\text{магн}} = \frac{\mu}{2c^2} \sum_i \int \int \frac{j_i' j_i \, dv_i \, dv_i'}{r} + \frac{\mu}{c^2} \sum_{k>i} \int \int \frac{j_k j_i \, dv_i \, dv_k}{r}, \qquad (25,5)$$

где j' — плотность тока в элементе объема dv_i', создающего поле в объеме dv_i, r — расстояние между dv_i и dv_i'.

Подобно тому, как энергия электростатического поля в случае системы проводников сводится к совокупности энергий последних, энергия магнитного поля, даваемая формулой (25,5), может рассматриваться как энергия квазистационарных токов.

Определим коэффициенты самоиндукции L_{ii} и коэффициенты взаимной индукции L_{ik} так, чтобы имело место равенство

$$T_{\text{магн}} = \frac{\mu}{2c^2} \sum_i \int \int \frac{j_i j_i' \, dv_i \, dv_i'}{r} + \frac{\mu}{c^2} \sum_{k>i} \int \int \frac{j_k j_i \, dv_i \, dv_k}{r} \equiv$$
$$\equiv \sum_i L_{ii} \frac{I_i^2}{2} + 2 \sum_{k>i} L_{ik} \frac{I_i I_k}{2}. \qquad (25,6)$$

Первая сумма представляет совокупность собственных энергий токов во всех проводниках, вторая — совокупность взаимных энергий.

Формула (25,6) справедлива в равной мере для линейных и нелинейных проводников.

В случае линейных проводников определение коэффициентов взаимной индукции совпадает с (24,12). Действительно, в этом случае

$$\frac{\mu}{c^2} \sum_{k>i} \int \int \frac{j_k j_i \, dv_i \, dv_k}{r} = \frac{\mu}{c^2} \sum_{k>i} I_i I_k \oint \oint \frac{dl_i \, dl_k}{r} = \sum_{k>i} I_i I_k L_{ik},$$

где определение L_{ik} совпадает с (24,12).

Новое определение коэффициентов самоиндукции имеет существенное значение для нелинейных проводников. Оно свободно от трудностей, связанных с неограниченным возрастанием интеграла при $r \to 0$ (см. § 24). Элементы объема $dv\,dv'$ убывают при $r \to 0$ быстрее, чем $\frac{1}{r}$, и интеграл стремится к нулю.

По этой причине, как мы увидим ниже на конкретном примере, формула (25,6) служит для определения коэффициентов самоиндукции.

Энергия $T_{\text{магн}}$ совокупности линейных проводников может быть представлена в другом виде. Именно, в случае линейных токов первое слагаемое в (25,4) можно переписать в виде

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\sum_i \int A_i j_i \, dS_i \, dl_i = \frac{1}{2c}\sum_i I_i \oint A_i \, dl_i =$$
$$= \frac{1}{2c}\sum_i I_i \int \operatorname{rot} A_i \, dS_i = \frac{1}{2c}\sum_i I_i \int B_i \, dS_i = \frac{1}{2c}\sum_i I_i \Phi_i,$$

где $\Phi_i = \int B_i dS_i$ — поток магнитной индукции через i-й проводник.

Найдем коэффициент самоиндукции для некоторых простейших систем. В качестве первого примера рассмотрим коэффициент самоиндукции кругового соленоида. Поле внутри соленоида дается формулой (24,18). Энергия поля равна

$$\frac{\mu H^2 V}{8\pi} = \frac{\mu n^2 I^2 S \cdot 2\pi D}{2\pi c^2 D^2} = \frac{LI^2}{2},$$

откуда

$$L = \frac{2\mu n^2 S}{c^2 D}.$$

Рассмотрим теперь коэффициент самоиндукции двух концентрических цилиндров, по которым текут одинаковые и противоположно направленные токи силой I. Пусть радиусы цилиндров будут R_1 и R_2, их высота l, толщина стенок — пренебрежимо мала. Очевидно, что магнитное поле внутри малого цилиндра и вне большого цилиндра равно нулю.

Поле в зазоре между цилиндрами имеет напряженность

$$H = \frac{2I}{cr}.$$

Энергия поля равна

$$\int \frac{\mu H^2}{8\pi} dV = \frac{\mu I^2 l}{c^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r \, dr}{r^2} = \frac{\mu I^2 l}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Отсюда

$$L = \frac{2\mu l}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$