§ 26. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции для нелинейных проводников.

При вычислении коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции в нелинейных проводниках мы ограничимся случаем, когда магнитная проницаемость вещества проводников и среды близка к единице (т. е. когда в системе нет ферромагнетиков). При этом можно приближенно считать, что μ имеет одинаковое значение μ_0 во всем пространстве. Иными словами, мы будем считать всю систему однородной по ее магнитным свойствам.

Для краткости записи мы будем полагать, что система состоит из двух нелинейных проводников. Геометрическую форму и распределение плотностей токов внутри проводников мы будем считать неизменными во времени, проводники — неподвижными и недеформируемыми.

Разобьем оба нелинейных проводника на совокупность трубок тока. Возможность такого разбиения вытекает из соленоидального характера токов в квазистационарных полях. Для каждой трубки dS_α можно написать соотношение (24,6), т. е.

$$\oint j_\alpha \frac{dl_\alpha}{\sigma_\alpha} = \oint \boldsymbol{E}_\alpha\, d\boldsymbol{l}_\alpha + \oint \boldsymbol{E}_\alpha^{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l}_\alpha. \tag{26,1}$$

Для квазистационарных токов справедливы соотношения (16,5)—(16,7), полученные для любого соленоидального тока. Умножая обе части равенства (26,1) на $\frac{dI_\alpha}{I}$ — величину, постоянную вдоль проводника, и интегрируя по всему сечению проводника, имеем

$$\int\limits_S \frac{dI_\alpha}{I} \oint j_\alpha \frac{dl_\alpha}{\sigma_\alpha} = \int\limits_S \frac{dI_\alpha}{I} \oint \boldsymbol{E}_\alpha\, d\boldsymbol{l}_\alpha + \int\limits_S \frac{dI_\alpha}{I} \int \boldsymbol{E}_\alpha^{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l}_\alpha. \tag{26,2}$$

Преобразуем входящие в (26,2) интегралы для некоторого, например первого, проводника следующим образом:

$$\int\limits_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I_1} \oint j_1 \frac{dl_1}{\sigma_1} = \int \oint \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I_1} j_1 \frac{dl_1}{\sigma_1} = \int\limits_{S_1} \oint \psi_1 \frac{dS_\alpha^{(1)}}{S_1} j_1 \frac{dl_1}{\sigma_1} =$$

$$= \int \oint \frac{I_1 \psi_1^2\, dS_\alpha^{(1)}\, dl_1}{\sigma_1 S_1^2} = I_1 \int\limits_{S_1} \oint \frac{\psi_1^2\, dS_\alpha^{(1)}\, dl_1}{\sigma_1 S_1^2} = I_1 R_1, \tag{26,3}$$

где R_1 — полное омическое сопротивление первого проводника. При этом мы воспользовались (16,7) и (16,8). Для линейного проводника $\psi = 1$ и выражение для R совпадает с (15,4). Далее, имеем на основании (23,7) и (24,10)

$$\int\limits_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I} \oint \boldsymbol{E}_1 \, d\boldsymbol{l}_1 = -\frac{1}{c} \int\limits_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I} \frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int\limits_{S} \oint \frac{dI_\alpha}{I} \boldsymbol{A}_1 \, d\boldsymbol{l}_1 =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int\limits_{S} \oint \boldsymbol{j}_1 \frac{\boldsymbol{A}_1 \, dl_\alpha \, dS_\alpha}{I} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{1}{I} \int \boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{A}_1 \, dv, \qquad (26,4)$$

здесь $\boldsymbol{A}_1$ — вектор-потенциал магнитного поля в той точке, в которой берется элемент объема dv.

Будем рассматривать теперь один из проводников, для определенности — первый. Поскольку по предположению проводники и среда однородны в магнитном отношении, мы можем воспользоваться для $\boldsymbol{A}_1$ выражением (17,3), которое для наших целей удобно записать в виде

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0}{c} \int \boldsymbol{j}' \frac{dV'}{r} = \frac{\mu_0}{c} \int \boldsymbol{j}_1' \frac{dv_1'}{r_{11}'} + \frac{\mu_0}{c} \int \boldsymbol{j}_2 \frac{dv_2}{r_{12}}. \qquad (26,5)$$

Первое слагаемое дает вектор-потенциал, создаваемый токами в объеме первого проводника, второе — токами в объеме второго проводника, r_{11}' означает расстояние между точками, к которым отнесены соответственно элемент dv_1' и элемент dl_1, r_{12} имеет аналогичный смысл.

Подставляя значение $\boldsymbol{A}_1$ в (26,4), имеем

$$\int\limits_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I_1} \oint \boldsymbol{E}_1 \, d\boldsymbol{l}_1 = -\frac{\mu_0}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{1}{I_1} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{j}_1' \, dv_1 \, dv_1'}{r_{11}'} -$$

$$-\frac{\mu_0}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{1}{I_1} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{j}_2 \, dv_1 \, dv_2}{r_{12}}. \qquad (26,6)$$

Введем теперь коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции, определив их по формулам:

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2}\frac{\mu_0}{c^2} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1' \boldsymbol{j}_1 \, dv_1' \, dv_1}{r_{11}'}, \qquad (26,7)$$

$$L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2}\frac{\mu_0}{c^2} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{j}_2 \, dv_1 \, dv_2}{r_{12}}, \qquad (26,8)$$

$$L_{21} = L_{12}. \qquad (26,9)$$

Нетрудно заметить, что L_{11} и L_{12} не зависят от сил токов I_1 и I_2. Действительно, с помощью (16,8) имеем

$$L_{11}=\frac{\mu_0}{c^2}\int\int\frac{\psi_1\psi_1'}{S_1S_1'}\frac{(l_1l_1')\,dv_1'\,dv_1}{r_{11}'}, \tag{26,10}$$

$$L_{12}=\frac{\mu_0}{c^2}\int\int\frac{\psi_1\psi_2\,(l_1l_2)}{S_1S_2}\,\frac{dv_1\,dv_2}{r_{12}}. \tag{26,11}$$

Тогда окончательно

$$\int\limits_{S_1}\frac{dI_\alpha}{I_1}\oint \boldsymbol{E}_1\,d\boldsymbol{l}_1=-L_{11}\frac{dI_1}{dt}-L_{12}\frac{dI_2}{dt} \tag{26,12}$$

и аналогично для второго проводника.

Наконец, в интеграле $\int\frac{dI_\alpha}{I}\oint \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,d\boldsymbol{l}$ можно допустить, что сторонняя э. д. с. одинакова по всему сечению проводника, и написать

$$\int\frac{dI_\alpha'}{I_1}\oint \boldsymbol{E}_1^{\text{стор}}\,dl_1=\mathscr{E}_1. \tag{26,13}$$

Подставляя (26,3), (26,12) и (26,13) в (26,2), находим окончательно

$$I_1R_1=-L_{11}\frac{dI_1}{dt}-L_{12}\frac{dI_2}{dt}+\mathscr{E}_1 \tag{26,14}$$

и аналогично

$$I_2R_2=-L_{22}\frac{dI_2}{dt}-L_{21}\frac{dI_1}{dt}+\mathscr{E}_2. \tag{26,15}$$

Уравнения (26,14)—(26,15) совпадают с уравнениями (24,17) для линейных токов. Различие между ними заключается в том, что для нелинейных проводников нахождение сопротивлений и коэффициентов магнитной индукции является весьма сложной задачей. Во все эти величины входят распределения токов по сечению проводников. Поэтому практическая важность полученных уравнений невелика. Зато нами получено определение коэффициентов индукции (26,7)—(26,9), не основанное (в отличие от (24,12) и (24,13)) на предположении о линейности проводников.

В заключение подчеркнем, что, как это легко видеть, коэффициент взаимной индукции, определенный формулой (26,8) для линейного проводника ($\psi_1=\psi_2=1$), совпадает с (24,12),