§ 27. Уравнения Лагранжа для системы квазистационарных токов

До сих пор мы считали, что взаимное расположение проводников с током является заданным. На практике часто приходится рассматривать более общий случай подвижных проводников или проводников, изменяющих свою форму, взаимное расположение и т. п., находящихся в электромагнитном поле. Емкости, само- и взаимоиндукции и другие величины, которые мы ранее считали постоянными, при этом оказываются функциями некоторых параметров q_i, характеризующих конфигурацию системы. При рассмотрении таких систем весьма удобным является метод Лагранжа, в котором, как будет ясно из дальнейшего, электромагнитные и механические величины, характеризующие систему, фигурируют как формально равноправные. Оказывается, что упомянутые параметры q_i, а также величины зарядов Q_i в проводниках можно выбрать за некоторые обобщенные координаты.

Составим уравнения Лагранжа, характеризующие систему в обобщенных координатах q_i и Q_i. Обобщенными скоростями, отвечающими зарядам Q_i, являются величины $\dot{Q}_i = I_i$, т. е. токи, текущие в проводниках. Если включить энергию магнитного поля в кинетическую энергию системы, то полная кинетическая энергия равна

$$T = T_{\text{мех}} + T_{\text{магн}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}(q_i, t)\, I_i(t)\, I_k(t) + T_{\text{мех}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k + T_{\text{мех}}, \qquad (27{,}1)$$

где $T_{\text{мех}}$ — кинетическая энергия механического движения проводников.

Аналогично потенциальную энергию системы будем считать слагающейся из энергии электрического поля (т. е. энергии емкостей, имеющихся в системе) и механической потенциальной энергии:

$$U = \sum \frac{Q_i^2(t)}{2C_i(q_i, t)} + U_{\text{мех}}. \qquad (27{,}2)$$

Тогда функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2}\sum L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k - \frac{1}{2}\sum \frac{Q_i^2}{C_i} + (T_{\text{мех}} - U_{\text{мех}}). \qquad (27{,}3)$$

Введем также диссипативную функцию

$$F = \frac{1}{2}\sum R_i(q_i, t)\,\dot{Q}_i^2 \qquad (27{,}4)$$

и произвольные «внешние» силы, действующие на систему, не допускающие, вообще говоря, потенциала — сторонние э. д. с. $\mathscr{E}_i$. Напомним, что внешние силы $F_{\text{внешн}}$ в уравнениях Лагранжа представляют силы, зависящие не только от обобщенных координат, но также и от других, не имеющих отношения к данной системе, параметров. Эти силы определяются обычным соотношением $\delta A = F_{\text{внешн}}\delta q$, где δA — виртуальная работа на перемещении δq.

Тогда уравнения Лагранжа для обобщенных координат Q_i приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{Q}_i} + F_{\text{внешн}}. \tag{27,5}$$

После подстановки L в (27,5) и в предположении о неподвижности и недеформируемости контуров с током (постоянство индуктивностей и емкостей) получаем

$$\sum L_{ik}\ddot{Q}_k + \frac{Q_i}{C_i} = -R_i\dot{Q}_i + \mathscr{E}_i, \tag{27,6}$$

что совпадает с (24,17) и свидетельствует о правильном выборе выражений для кинетической и потенциальной энергии.

Из уравнения Лагранжа (27,6) следуют законы сохранения импульса и энергии. Для системы, на которую не действуют внешние силы (т. е. $F_{\text{внешн}}=0$) и в которой не происходит диссипация энергии (т. е. $F=0$), уравнение (27,6) приобретает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0.$$

Если в i-м контуре с током нет емкости, то соответствующая координата является циклической и для нее имеет место равенство

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0.$$

При этом соответствующий обобщенный импульс сохраняется:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L}{\partial I_i} = \sum L_{ik}I_k = \text{const}.$$

Напишем теперь закон сохранения энергии для системы неподвижных проводников. По общим правилам, энергия системы

$$E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\dot{Q}_i - L = \frac{1}{2}\sum L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k + \frac{1}{2}\sum \frac{Q_i^2}{C_i}. \tag{27,7}$$

При наличии диссипативных процессов

$$\frac{dE}{dt} = -2F + \sum F_{\text{внешн}}\dot{Q}_i.$$

Здесь $2F$ — диссипируемая энергия, а $\sum F_{\text{внешн}}\dot{Q}_i$ — работа внешних сил в единицу времени.

Подставляя значение E и F, записываем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k + \frac{1}{2}\sum \frac{Q_i^2}{C_i}\right) = -\sum R_i\dot{Q}_i^2 + \sum \mathscr{E}_i\dot{Q}_i. \quad (27,8)$$

Переписав его в форме

$$\frac{d}{dt}(T_{\text{магн}} + U_{\text{эл}}) = \sum (\mathscr{E}_i I_i - R_i I_i^2), \quad (27,9)$$

мы видим, что в замкнутой системе, не подверженной действию внешних сил ($\mathscr{E}_i = 0$) и в которой нет диссипативных сил ($R_i = 0$), энергия системы сохраняется:

$$T_{\text{магн}} + U_{\text{эл}} = 0. \quad (27,10)$$

В случае, когда $\mathscr{E}_i \neq 0$, $R_i \neq 0$, формула (27,9) показывает, что разность между работой, производимой в единицу времени сторонними э. д. с. и выделяемым джоулевым теплом, идет на увеличение энергии магнитного и электрического полей, а также на увеличение механической энергии системы в случае подвижной системы контуров.

В частном случае одного неподвижного контура с током (27,9) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}\right) = \mathscr{E}I - RI^2.$$

Применим полученные результаты к одиночному контуру с переменным током, в который включена некоторая емкость (конденсатор), к так называемой RLC-цепочке.

Уравнение (27,6) приобретает вид

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = -R\dot{Q} + \mathscr{E}(t). \quad (27,11)$$

Если источник переменного тока — сторонняя э. д. с. представляет гармоническую функцию времени

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t},$$

то частное решение (27,11) имеет вид

$$Q = Q_0 e^{i\omega t}.$$

Нас будет интересовать зависимость тока от времени, которую также можно представить в виде

$$I = I_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя это в (27,11), получаем, что

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{Z^*},$$

где величина Z^*, именуемая комплексным сопротивлением или импедансом, равна

$$Z^* = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{27,12}$$

Переходя от комплексного к вещественному выражению для тока, находим

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{\mathscr{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{27,13}$$

Мы видим, что в контуре возникают вынужденные колебания тока с частотой ω, сдвинутые по фазе на угол φ относительно сторонней э. д. с.

Наряду с вынужденными колебаниями в контуре могут существовать свободные или собственные колебания. Если сторонняя э. д. с. $\mathscr{E} = 0$, то из (27,11) легко находим

$$I = I_0 e^{i\omega_0 t},$$

где частота собственных колебаний

$$\omega_0 = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \tag{27,14}$$

При $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{CL}}$ имеют место затухающие колебания, причем затухание характеризуется временем $\tau = \frac{2L}{R}$. При $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{CL}}$ разряд имеет апериодический характер. Если система содержит несколько контуров, связанных между собой соответствующими коэффициентами взаимной индукции, то уравнения (27,6) могут быть решены по общим правилам решения систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. За детальным разбором подобного рода задач, представляющих особый интерес для электротехники, мы отсылаем читателя к специальной литературе [1]).

Найденные соотношения справедливы как для системы контуров, связанных между собой индуктивно (т. е. при наличии

---

[1]) См., например, В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.

отличных от нуля коэффициентов L_{ik}), так и для системы разветвленных контуров. В последнем случае закон Кирхгофа позволяет уменьшить число независимых токов I_i или координат Q_i.

В заключение заметим, что результаты этого параграфа до известной степени оправдывают термин «сторонняя» э. д. с., поскольку эта величина действительно играет роль обобщенной силы, действующей на систему.

§ 28. Обобщенные пондеромоторные силы в системе с подвижными контурами

В предыдущем параграфе мы ограничились случаем неподвижных контуров. Рассмотрим теперь подвижные контуры с током.

Найдем, прежде всего, выражение для обобщенной силы, отвечающей механической обобщенной координате q_i, характеризующей пространственную конфигурацию i-го контура с током. По определению

$$F_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Обычно можно считать, что емкости, имеющиеся в системе, не изменяются при движении проводников. Тогда, подставляя L из (27,3), находим

$$F_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} T_{\text{магн}} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} \sum L_{ik}(q_i, q_k) I_i I_k. \tag{28,1}$$

Мы видим, что энергия магнитного поля играет двоякую роль: по отношению к координатам электромагнитного характера Q_i она является кинетической энергией; по отношению к пространственным координатам q_i она представляет взятую с обратным знаком потенциальную энергию. Пондеромоторные силы действуют в таком направлении, которое отвечает увеличению магнитной энергии поля. Применим формулу (28,1) к некоторым конкретным случаям.

Рассмотрим, прежде всего, механические силы, действующие на уединенный контур с током. Пусть q — обобщенная координата, характеризующая размеры контура. Сила, действующая на контур со стороны его собственного магнитного поля,

$$F_q = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L_{ii}}{\partial q}. \tag{28,1'}$$

Сила, действующая на проводник с током, возрастает с увеличением $\frac{\partial L_{ii}}{\partial q}$. Поскольку самоиндукция растет с увеличением размеров проводника, это означает, что собственное магнитное