отличных от нуля коэффициентов L_{ik}), так и для системы разветвленных контуров. В последнем случае закон Кирхгофа позволяет уменьшить число независимых токов I_i или координат Q_i.

В заключение заметим, что результаты этого параграфа до известной степени оправдывают термин «сторонняя» э.д.с., поскольку эта величина действительно играет роль обобщенной силы, действующей на систему.

§ 28. Обобщенные пондеромоторные силы в системе с подвижными контурами

В предыдущем параграфе мы ограничились случаем неподвижных контуров. Рассмотрим теперь подвижные контуры с током.

Найдем, прежде всего, выражение для обобщенной силы, отвечающей механической обобщенной координате q_i, характеризующей пространственную конфигурацию i-го контура с током. По определению

$$F_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Обычно можно считать, что емкости, имеющиеся в системе, не изменяются при движении проводников. Тогда, подставляя L из (27,3), находим

$$F_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} T_{\text{магн}} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} \sum L_{ik}(q_i, q_k) I_i I_k. \qquad (28,1)$$

Мы видим, что энергия магнитного поля играет двоякую роль: по отношению к координатам электромагнитного характера Q_i она является кинетической энергией; по отношению к пространственным координатам q_i она представляет взятую с обратным знаком потенциальную энергию. Пондеромоторные силы действуют в таком направлении, которое отвечает увеличению магнитной энергии поля. Применим формулу (28,1) к некоторым конкретным случаям.

Рассмотрим, прежде всего, механические силы, действующие на уединенный контур с током. Пусть q — обобщенная координата, характеризующая размеры контура. Сила, действующая на контур со стороны его собственного магнитного поля,

$$F_q = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L_{ii}}{\partial q}. \qquad (28,1')$$

Сила, действующая на проводник с током, возрастает с увеличением $\frac{\partial L_{ii}}{\partial q}$. Поскольку самоиндукция растет с увеличением размеров проводника, это означает, что собственное магнитное поле стремится деформировать проводник так, чтобы его размеры увеличились.

В случае системы проводников рассмотрим сначала один подвижный контур, положение которого характеризуется координатой q_α. Конфигурацию и токи во всех остальных контурах, имеющихся в системе, будем считать заданными. Тогда сила, действующая на подвижный контур, равна

$$F_{q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik}(q_i, q_k) I_i I_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial L_{\alpha k}}{\partial q_\alpha} I_\alpha I_k + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial L_{i\alpha}}{\partial q_\alpha} I_i I_\alpha = I_\alpha \sum \frac{\partial L_{\alpha k}}{\partial q_\alpha} I_k = \frac{I_\alpha}{c} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_\alpha}. \quad (28,2)$$

Неизменность положений всех, кроме α-го, контуров в пространстве отвечает заданному значению внешнего поля. При этом выводе мы воспользовались равенством (24,9) — определением потока индукции.

Если, в частности, обобщенная координата q_α представляет угол θ, характеризующий положение плоского контура с током во внешнем поле, то обобщенная сила F_θ является механическим моментом, действующим на контур:

$$M = \frac{I}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Поток индукции через недеформируемый плоский контур, находящийся во внешнем поле $\boldsymbol{B}_0$, равен

$$\Phi = B_0 S \cos\theta,$$

где S — площадь контура и θ — угол между $\boldsymbol{B}_0$ и нормалью к плоскости. Поэтому

$$M = -\frac{IS}{c} B_0 \sin\theta. \quad (28,3)$$

Заметим, что обобщенная сила (28,2) в случае одного линейного проводника с током во внешнем магнитном поле сводится к силе Лоренца. Действительно, поскольку

$$\delta\Phi = \boldsymbol{B}[\delta\boldsymbol{q}\,\delta\boldsymbol{l}] = [\delta\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}]\,\delta\boldsymbol{q},$$

где $\delta\boldsymbol{q}$ — пространственное перемещение недеформируемого контура,

$$d\boldsymbol{F} = \frac{1}{c} I [d\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}] = \frac{1}{c} [d\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}] j\, dS = \frac{1}{c} [\boldsymbol{j}\boldsymbol{B}]\, dV, \quad (28,4)$$

где $dV = dS\,dl$ — элемент объема проводника с током. Сила (28,4) является усредненной лоренцевой силой, в которой вместо поля в пустоте $\boldsymbol{H}$ стоит среднее магнитное поле в среде $\boldsymbol{B}$.

Рассмотрим теперь систему из двух проводников с током и найдем силу взаимодействия между ними. В этом случае в качестве обобщенной координаты q следует выбрать расстояние r_{12} между элементами обоих проводников dl_1 и dl_2.

Из определения коэффициента взаимной индукции (24,12) и (28,2) имеем

$$F = I_1 I_2 \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial r_{12}} \oint \oint \frac{dl_1 \, dl_2}{r_{12}} = -\frac{\mu I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{r_{12} (dl_1 \, dl_2)}{r_{12}^3}. \qquad (28,5)$$

Пусть, в частности, оба тока текут в одном направлении в параллельных линейных проводниках. Тогда $dl_1 \| dl_2$ и сила F отвечает притяжению между проводниками.

Напротив, в случае токов, текущих в противоположном направлении, между проводниками возникает отталкивание.

Мы видим, что два «одноименных» тока стремятся сблизиться и усилить общее магнитное поле. В этом их отличие от одноименных статических зарядов, которые стремятся разойтись, ослабив электростатическое поле.

Рассмотрим еще вопрос о работе, которая совершается силой, смещающей контур с током. Согласно (28,2) эта работа равна

$$\delta W = F_{q_\alpha} \delta q_\alpha = \frac{I_\alpha}{c} \delta \Phi_\alpha. \qquad (28,6)$$

На первый взгляд мы приходим к парадоксальному результату: работа δW выполнена силой, действующей на заряды со стороны магнитного поля. Последняя, однако, перпендикулярна скорости зарядов и не может производить над ними работы. В действительности, однако, написав формулу для работы, мы не учли явлений индукции, имеющих место в проводнике, движущемся в магнитном поле. При смещении проводника в нем индуцируется э. д. с. $E^{\text{инд}}$ и производится работа $\delta W'$ над зарядами:

$$\delta W' = \delta t \int j E^{\text{инд}} \, dV = I_\alpha \delta t \oint E^{\text{инд}} \, dl = -\frac{I_\alpha}{c} \delta \Phi_\alpha. \qquad (28,7)$$

Полная работа, совершаемая магнитным полем над контуром с током,

$$\delta W + \delta W' = 0, \qquad (28,8)$$

как этого и следовало ожидать.

Этот результат имеет вполне общий характер и может быть перенесен и на нелинейные проводники.

В заключение рассмотрим пример, наглядно иллюстрирующий достоинства метода Лагранжа, Пусть имеются два контура: первый с заданным током I_1, вращающийся внутри другого под действием заданной силы F, второй — неподвижный. В последнем индуцируется ток, поступающий в цепь с большой нагрузкой. Емкостей в обоих контурах нет. Ясно, что такое устройство представляет динамомашину переменного тока. Первый контур именуется ротором, второй — статором.

Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - U_{\text{мех}},$$

где α — угол поворота и I_0 — момент инерции ротора. Коэффициент взаимной индукции зависит от ориентации ротора и статора, т. е. от угла α.

Уравнение движения для обобщенной координаты—угла α — имеет вид

$$I_0 \ddot{\alpha} - I_1 I_2 \frac{dL_{12}}{d\alpha} = M_0, \tag{28,9}$$

где $M_0 = -\dfrac{\partial U_{\text{мех}}}{\partial \alpha}$ — момент вращающей силы.

Уравнение движения для обобщенной координаты — заряда Q_2 — уравнение тока в статоре, согласно (27,5) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial I_2} = - R_2 I_2,$$

или

$$\frac{d}{dt} (L_{22} I_2 + L_{12} I_1) = - R_2 I_2,$$

откуда

$$L_{22} \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + L_{12} \frac{dI_1}{dt} + I_1 \frac{dL_{12}}{dt} = 0. \tag{28,10}$$

Состояние системы должно быть найдено из совместного решения уравнений (28,9) и (28,10).

Считая сопротивление R_2 весьма большим (большая нагрузка в цепи статора), с точностью до членов порядка $\dfrac{1}{R_2}$, можно приближенно написать

$$I_2 \approx -\frac{I_1}{R_2} \frac{dL_{12}}{dt} = -\frac{I_1}{R_2} \frac{dL_{12}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt}. \tag{28,11}$$

При этом мы пренебрегли в (28,10) малыми слагаемыми, не содержащими R_2. Подставляя (28,11) в (28,9), получаем

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{I_1^2}{R_2} \left(\frac{dL_{12}}{d\alpha}\right)^2 \frac{d\alpha}{dt} = M_0.$$

В квазистационарном состоянии можно пренебречь, как малым, членом с угловым ускорением $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, поскольку последнее мало. Тогда для угловой скорости вращения находим

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{M_0R_2}{I_1^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{dL_{12}}{d\alpha}\right)^2}=\text{const}. \qquad (28,12)$$

Выражения (28,11) и (28,12) дают решение поставленной задачи На практике обычно применяются более сложные схемы, например машины с самовозбуждением, в которых индуцированный ток I_2 вводится в первый контур, и т. п

Мы оставили также без рассмотрения важные особенности реальных машин, связанные с существованием в них намагничивающихся сердечников. Разобранный пример иллюстрирует лишь достоинства метода Лагранжа в случае систем, в которых механическое движение и текущие токи непосредственно связаны между собой.

§ 29. Флуктуации в проводниках и формула Найквиста

В результате флуктуационных процессов в электрической цепи возникают флуктуации тока, которые в технике именуют шумами Физически появление флуктуационных токов в проводнике (в отсутствие сторонней э. д. с.) связано с флуктуациями числа электронов, движущихся в одном направлении. В присутствии сторонней э. д. с. флуктуационные токи накладываются на стационарный или квазистационарный ток.

Флуктуации тока в радиоаппаратуре имеют огромное значение в современной радиотехнике Шумовой фон определяет предельную чувствительность сигнала при однократном приеме. Дальнейшее повышение точности может быть достигнуто лишь применением многократных измерений,

Мы рассмотрим теорию флуктуаций в электрической цепи с индуктивностью L и омическим сопротивлением R. Флуктуационные процессы можно характеризовать случайной флуктуационной э. д. с. $\mathscr{E}(t)$. Изменения э. д. с. $\mathscr{E}(t)$ происходят за время, которое весьма мало по сравнению со временем релаксации контура $T=L/R$.

Естественно пытаться описать процессы, происходящие в цепи с помощью обобщенного закона Ома:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=\mathscr{E}(t). \qquad (29,1)$$

В основу уравнения (29,1) положено довольно естественное допущение: между случайным током в цепи и создающей его