В квазистационарном состоянии можно пренебречь, как малым, членом с угловым ускорением $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, поскольку последнее мало. Тогда для угловой скорости вращения находим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{M_0R_2}{I_1^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{dL_{12}}{d\alpha}\right)^2} = \text{const}. \tag{28,12}$$

Выражения (28,11) и (28,12) дают решение поставленной задачи На практике обычно применяются более сложные схемы, например машины с самовозбуждением, в которых индуцированный ток I_2 вводится в первый контур, и т. п

Мы оставили также без рассмотрения важные особенности реальных машин, связанные с существованием в них намагничивающихся сердечников. Разобранный пример иллюстрирует лишь достоинства метода Лагранжа в случае систем, в которых механическое движение и текущие токи непосредственно связаны между собой.

§ 29. Флуктуации в проводниках и формула Найквиста

В результате флуктуационных процессов в электрической цепи возникают флуктуации тока, которые в технике именуют шумами Физически появление флуктуационных токов в проводнике (в отсутствие сторонней э. д. с.) связано с флуктуациями числа электронов, движущихся в одном направлении. В присутствии сторонней э. д. с. флуктуационные токи накладываются на стационарный или квазистационарный ток.

Флуктуации тока в радиоаппаратуре имеют огромное значение в современной радиотехнике Шумовой фон определяет предельную чувствительность сигнала при однократном приеме. Дальнейшее повышение точности может быть достигнуто лишь применением многократных измерений,

Мы рассмотрим теорию флуктуаций в электрической цепи с индуктивностью L и омическим сопротивлением R. Флуктуационные процессы можно характеризовать случайной флуктуационной э. д. с. $\mathscr{E}(t)$. Изменения э. д. с. $\mathscr{E}(t)$ происходят за время, которое весьма мало по сравнению со временем релаксации контура $T = L/R$.

Естественно пытаться описать процессы, происходящие в цепи с помощью обобщенного закона Ома:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E}(t). \tag{29,1}$$

В основу уравнения (29,1) положено довольно естественное допущение: между случайным током в цепи и создающей его случайной э. д. с. существует такая же связь, как между обычным током и обычной э. д. с. Релаксация тока характеризуется постоянным сопротивлением R. Следует подчеркнуть, что фактически при высоких частотах R (или $\sigma=1/R$) оказывается функцией частоты. Это обстоятельство не отражается, однако, на общих результатах теории.

Случайная э. д. с. $\mathscr{E}(t)$ имеет, очевидно, следующие свойства:

$$\overline{\mathscr{E}(t)}=0, \qquad \overline{[\mathscr{E}(t)]^2}\neq 0. \tag{29,2}$$

Проинтегрируем формально линейное уравнение (29,1) по времени. Тогда для случайного тока

$$i(t)=i_0e^{-\frac{t}{T}}+e^{-\frac{t}{T}}\int\limits_0^t e^{\frac{t'}{T}}\mathscr{E}(t')\,dt. \tag{29,3}$$

Следует заметить, что интегрирование уравнения (29,1) со случайной функцией в правой части нуждается в известном оправдании с чисто математической точки зрения. За деталями этого вопроса мы отсылаем читателя к специальной литературе[1]).

С помощью формулы (29,3) можно составить коррелятивную функцию

$$\begin{aligned}\langle i(t)\,i(t+\tau)\rangle &= \left\langle\left[i_0e^{-\frac{t}{T}}+e^{-\frac{t}{T}}\int\limits_0^t e^{\frac{t'}{T}}\mathscr{E}(t')\,dt'\right]\times\right.\\ &\left.\times\left[i_0e^{-\frac{t+\tau}{T}}+e^{-\frac{t+\tau}{T}}\int\limits_0^{t+\tau}\exp\left\{\frac{t''}{T}\right\}\mathscr{E}(t'')\,dt''\right]\right\rangle=\\ &= i_0^2\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}+\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}\times\\ &\times\int\limits_0^t\int\limits_0^{t+\tau}\exp\left\{\frac{t'+t''}{T}\right\}\cdot\langle\mathscr{E}(t')\,\mathscr{E}(t'')\rangle\,dt'\,dt''. \end{aligned}\tag{29,4}$$

Члены, содержащие случайную функцию $\mathscr{E}(t)$ в первой степени, обращаются в нуль при усреднении.

Двойной интеграл в (29,4) можно вычислить следующим образом: вводя новые переменные

$$x=t'+t''; \qquad y=t'-t'',$$

[1]) См., например, Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, Гостехиздат, 1948; Д. Мак-Доналд, Введение в физику шумов и флуктуаций, «Мир», 1964.

имеем

$$I(t,\ \tau)=\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}\int_0^{2t} e^{\frac{x}{T}}\,dx\int_{-t}^{t}\left\langle\mathscr{E}\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathscr{E}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\rangle dy.$$

Коррелятивная функция $\left\langle\mathscr{E}\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathscr{E}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\rangle$, согласно (29,4), не может зависеть от выбора переменной x. Полагая $x=y$, имеем

$$\left\langle\mathscr{E}\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathscr{E}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\rangle\equiv\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle.$$

Поскольку коррелятивная функция быстро убывает с ростом y, можно распространить пределы интегрирования до бесконечности, так что

$$I(t,\ \tau)=\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}\cdot\int_0^{2t} e^{\frac{x}{T}}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle\,dy=$$

$$=\frac{T}{2}e^{-\frac{\tau}{T}}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle\,dy.$$

Окончательно находим

$$\langle i(t)\,i(t+\tau)\rangle=i_0^2\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}+$$

$$+\frac{T}{2}e^{-\frac{\tau}{T}}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle\,dy. \qquad (29,5)$$

Полагая $t=0$, из (29,5) получаем коррелятивную функцию для тока

$$\langle i(0)\,i(\tau)\rangle=i_0^2e^{-\frac{\tau}{T}}. \qquad (29,6)$$

Пользуясь законом равнораспределения, можно написать среднее значение флуктуационного тока энергии в цепи:

$$\frac{Li_0^2}{2}=\frac{kT}{2}=\frac{\theta}{2},$$

так что окончательно автокоррелятивная функция для тока приобретает вид

$$\langle i(0)\,i(\tau)\rangle=\frac{\theta}{L}e^{-\frac{\tau}{T}}. \qquad (29,7)$$

С другой стороны, полагая $\tau = 0$, находим

$$\langle i(t)^2\rangle = i_0^2 e^{-\frac{2t}{T}} + \frac{T}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{T}}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y)\rangle\, dy.$$

При значениях $t \gg T$ в системе должно установиться статистическое равновесие. Опуская, как малые, величины $e^{-\frac{2t}{T}}$, находим

$$\langle i(t)^2\rangle = \frac{\theta}{L} = \frac{T}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y)\rangle\, dy,$$

откуда находим, подставляя $T = \frac{L}{R}$:

$$R = \frac{L^2}{2\theta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y)\rangle\, dy. \tag{29,8}$$

Формула (29,8) связывает между собой автокоррелятивную функцию случайной э. д. с. с сопротивлением линии. Это соотношение имеет глубокий смысл: оно связывает характеристику обратимых случайных процессов — коррелятивную функцию $\langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y)\rangle$ с характеристикой необратимого диссипативного процесса — сопротивлением R или временем релаксации T

$$\frac{1}{T} = \frac{L}{2\theta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y)\rangle\, dy. \tag{29,9}$$

Если воспользоваться формулой Винера—Хинчина (5,16) ч. III, то можно выразить коррелятивную функцию через спектральную плотиость:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y)\rangle\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{-i\omega y} g(\omega)\, d\omega\, dy = g(0) \tag{29,10}$$

и, следовательно,

$$R = \frac{L^2}{2\theta}\, g(0). \tag{29,11}$$

Эта формула является частным случаем важной флуктуационно-диссипативной теоремы, устанавливающей связь между характеристиками флуктуационных и диссипативных процессов (см. ч. VI).

В формуле (29,1) мы ограничились случаем, когда сопротивление можно считать не зависящим от частоты. Вопрос о связи флуктуационных и необратимых процессов будет подробно разобран в гл. VII ч. VI, посвященной физической кинетике. Вернемся к автокоррелятивной функции для тока и, воспользовавшись теоремой Винера — Хинчина, найдем с ее помощью спектральную плотность случайных токов в цепи.

Именно, согласно (5,15) ч. III и (29,11), можем написать

$$g_i(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle i(0)\,i(\tau)\rangle\, e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \tag{29,12}$$

где спектральная плотность тока $g_i(\omega)$ определена формулой

$$\overline{i^2}=\int\limits_0^{\infty} g_i(\omega)\,d\omega. \tag{29,13}$$

Подставляя в (29,12) выражение для $\langle i(0)i(\tau)\rangle$ из (29,7), находим

$$g_i(\omega)=\frac{\theta}{\pi L}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}}\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{\theta}{\pi R}\,\frac{1}{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}. \tag{29,14}$$

В металлах обычно $T=\frac{R}{L}\sim 10^{-13}$ *сек* и можно написать в хорошем приближении

$$g_i(\omega)\sim\frac{\theta}{\pi R}. \tag{29,15}$$

Таким образом, значение среднеквадратичное тока в замкнутой цепи, генерируемого случайной э. д. с. в интервале частот ω, $\omega+d\omega$, можно написать в виде

$$\overline{i^2}\,d\omega=\frac{\theta}{\pi R}\,d\omega. \tag{29,16}$$

В случае незамкнутой цепи вместо (29,16) можно написать для самопроизвольных флуктуаций э. д. с. соотношение

$$\overline{\mathscr{E}^2}\,d\omega=\frac{\theta R}{\pi}\,d\omega. \tag{29,17}$$

Формулы (29,17) и (29,16) называют формулами Найквиста. Они позволяют при расчете квазистационарных линий учитывать флуктуационные явления (например, флуктуационную э. д. с.) наряду с другими макроскопическими характеристиками.

Согласно (29,16) флуктуационный ток пропорционален $\sqrt{\theta}$ и обратно пропорционален $1/\sqrt{R}$. Последнее имеет простой смысл. Сопротивление $R=1/\sigma\sim 1/n$, где n — число электронов в 1 $см^3$. В соответствии с общей формулой (3,7) ч. III среднее значение $\sqrt{\overline{i^2}}\sim\sqrt{n}$.

Приведенный выше вывод содержал существенное ограничение: сопротивление считалось не зависящим от частоты. В части VI мы вернемся к обсуждению формулы Найквиста в области высоких частот. Будут учтены, в частности, квантовые эффекты, проявляющиеся при частотах $\omega > \frac{kT}{h} \equiv \frac{\theta}{h}$.

В полупроводниковых устройствах имеются дополнительные специфические механизмы возникновения шумов, которые также будут обсуждены в ч. VI.

§ 30. Скин-эффект

Мы изучали до сих пор квазистационарный ток в линейных цепях, считая проводники бесконечно тонкими. Теперь мы рассмотрим распределение переменного тока по сечению проводника. Предполагая по-прежнему выполненными условия квазистационарности, запишем уравнения Максвелла в однородной проводящей среде:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Легко получить раздельные уравнения для электрического и магнитного полей. Взяв повторно ротор от $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$, находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{H},$$

или

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (30,1)$$

Такое же уравнение получается и для магнитного поля.

Уравнение (30,1) и аналогичное уравнение для вектора $\boldsymbol{H}$ определяют зависимость полей от времени и координат в пространстве, занятом проводником. На границе этого пространства, т. е. на поверхности проводника, векторы поля удовлетворяют обычным граничным условиям.

Мы ограничимся решением уравнений поля в простейшем случае переменного тока, текущего в проводнике, заполняющем полупространство $z > 0$. Направление тока вдоль оси x и его зависимость от времени считаются заданными:

$$j_x = j(z)\,e^{i\omega t}; \quad j_y = j_z = 0.$$