Приведенный выше вывод содержал существенное ограничение: сопротивление считалось не зависящим от частоты. В части VI мы вернемся к обсуждению формулы Найквиста в области высоких частот. Будут учтены, в частности, квантовые эффекты, проявляющиеся при частотах $\omega > \frac{kT}{h} \equiv \frac{\theta}{h}$.

В полупроводниковых устройствах имеются дополнительные специфические механизмы возникновения шумов, которые также будут обсуждены в ч. VI.

§ 30. Скин-эффект

Мы изучали до сих пор квазистационарный ток в линейных цепях, считая проводники бесконечно тонкими. Теперь мы рассмотрим распределение переменного тока по сечению проводника. Предполагая по-прежнему выполненными условия квазистационарности, запишем уравнения Максвелла в однородной проводящей среде:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Легко получить раздельные уравнения для электрического и магнитного полей. Взяв повторно ротор от $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$, находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{H},$$

или

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (30,1)$$

Такое же уравнение получается и для магнитного поля.

Уравнение (30,1) и аналогичное уравнение для вектора $\boldsymbol{H}$ определяют зависимость полей от времени и координат в пространстве, занятом проводником. На границе этого пространства, т. е. на поверхности проводника, векторы поля удовлетворяют обычным граничным условиям.

Мы ограничимся решением уравнений поля в простейшем случае переменного тока, текущего в проводнике, заполняющем полупространство $z > 0$. Направление тока вдоль оси x и его зависимость от времени считаются заданными:

$$j_x = j(z)\,e^{i\omega t}; \quad j_y = j_z = 0.$$

Заметим, что j_x не может зависеть от координаты x в силу уравнения непрерывности, которое дает

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = 0.$$

В соответствии с законом Ома ищем электрическое поле, удовлетворяющее уравнению (30,1), в виде

$$E_x = E(z)\, e^{i\omega t}; \quad E_y = E_z = 0. \tag{30,2}$$

Подстановка (30,2) в (30,1) дает

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} = i\,\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}\, E(z). \tag{30,3}$$

Общим решением последнего уравнения служит

$$E(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz},$$

где

$$k = \sqrt{i\,\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}}.$$

Введем обозначение

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}. \tag{30,4}$$

Тогда

$$E(z) = Ae^{-i\frac{z}{\delta}}\, e^{-\frac{z}{\delta}} + Be^{i\frac{z}{\delta}}\, e^{\frac{z}{\delta}}.$$

Величина B должна быть, очевидно, положена равной нулю, чтобы поле имело всюду конечное значение.

Таким образом, окончательно

$$E_x = Ae^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{-i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}. \tag{30,5}$$

Формула (30,5) показывает, что напряженность электрического поля убывает экспоненциально в глубь проводника.

Эффективное уменьшение напряженности поля (уменьшение в «e» раз) происходит на расстоянии δ от поверхности.

Зная распределение электрического поля в проводнике, можно найти распределение магнитного поля.

Имеем, очевидно:

$$-i\,\frac{\mu\omega}{c}\, H_y = \mathrm{rot}_y\, \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\,\frac{(i+1)}{\delta}\, E_x,$$

$$H_x = H_z = 0.$$

Отсюда

$$H_y = (1-i)\,\frac{c}{\mu\omega\delta}\, Ae^{-i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}\, e^{-\frac{z}{\delta}}. \tag{30,6}$$

Магнитное поле оказывается перпендикулярным электрическому. Оно убывает в глубь проводника по тому же закону, что и электрическое; по абсолютной величине $|H_y| \approx \frac{c}{\omega\delta}|E_x|$, т. е. больше электрического в $\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)$ раз.

Таким образом, электромагнитное поле и соответственно весь ток в проводнике оказываются локализованными в тонком поверхностном слое толщиной порядка δ. Локализация поля в тонком поверхностном слое проводника называется скин-эффектом (от англ. skin — кожа), а величина δ — толщиной скин-слоя или глубиной проникновения.

Нетрудно видеть, что все джоулево тепло $\frac{j^2}{\sigma}$ выделяется в области скин-слоя.

Из определения δ ясно, что ее числовое значение может изменяться в широких пределах для различных частот ω и проводимостей σ. Чтобы представить порядок величин, укажем, что для меди $\delta \approx 1$ *см* при частоте 50 *гц* и $\delta \approx 3 \cdot 10^{-3}$ *см* для частот $\sim 10^5$ *гц*.

При $\omega \to 0$, т. е. при переходе к постоянному току, $\delta \to \infty$ и скин-эффект исчезает. Ток равномерно распределяется по сечению проводника. Напротив, при формальном переходе к пределу $\sigma \to \infty$ толщина скин-слоя стремится к нулю. Это — идеальный проводник, в который переменное поле не проникает в такой же мере, как и постоянное.

Результат, полученный нами для случая упрощенной модели проводника, имеет совершенно общий характер. При любой геометрической конфигурации проводников поле в них оказывается локализованным в скин-слое.

Если распределение обусловлено геометрическими свойствами проводника, то задача о нахождении поля в проводнике лишь незначительно усложняется по сравнению с разобранным примером. Так, в случае тока, текущего по длинному кабелю кругового сечения, сплошному или полому, вектор плотности тока направлен параллельно образующей кабеля. Поэтому общий ход решения задачи о нахождении распределения поля в кабеле совпадает с разобранным нами примером. Для глубины проникновения получается то же числовое значение. Геометрическое распределение поля сравнительно мало отличается от экспоненциального спадания, особенно при больших частотах, когда радиус кабеля велик по сравнению с глубиной проникновения. В общем случае массивного проводника произвольной формы нахождение распределения переменного поля представляет задачу, сложную в математическом отношении[1]).

[1]) См. В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954, гл. XI.

Однако независимо от формы проводника и даже механизма возбуждения в нем поля (с помощью сторонней э. д. с., внешним переменным магнитным полем и т. п.) общий вывод остается в силе: переменное электромагнитное поле проникает в проводник на глубину скин-слоя δ. При этом магнитное поле больше электрического в отношении $\frac{\lambda}{\delta}$.

Аналогичные результаты можно получить при рассмотрении другой проблемы. Пусть на металл действует — переменное электромагнитное поле, зависящее от времени по закону $e^{i\omega t}$.

Если магнитное поле у поверхности проводника $z = 0$ имеет значение H_0 граничное условие (5,4) позволяет сформулировать краевую задачу

$$\frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial H(z, t)}{\partial t}$$

$$H = H_0 \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$H \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Решение краевой задачи может быть написано аналогично (30,5)

$$H(z, t) = H_0 e^{i\omega t} e^{-\frac{z}{\delta}},$$

где толщина скин-слоя δ дается формулой (30,4).

Следует подчеркнуть, что скин-эффект становится все более резко выраженным при переходе к высоким частотам. Мы увидим в следующей главе, что в полях высокой частоты, когда поля нельзя более считать квазистационарными, по-прежнему имеет место скин-эффект, хотя глубина проникновения оказывается, вообще говоря, иной (см. § 33). Скин-эффект играет большую роль в технике переменных токов. Он позволяет применять полые кабели или кабели, покрытые слоем металла с особенно высокой проводимостью, что снижает расход материалов и мощностей.

§ 31. Электромагнитные волны в однородной изотропной среде

Рассмотрим распространение электромагнитного поля в пространственно однородной и изотропной среде, характеризуемой материальными постоянными ε_0, μ_0 и σ в среде без пространственной дисперсии. Индекс нуль означает, что материальные постоянные имеют статическое значение и отнесены к частоте $\omega = 0$. Ниже мы обсудим условия применимости этого допущения.