Однако независимо от формы проводника и даже механизма возбуждения в нем поля (с помощью сторонней э. д. с., внешним переменным магнитным полем и т. п.) общий вывод остается в силе: переменное электромагнитное поле проникает в проводник на глубину скин-слоя δ. При этом магнитное поле больше электрического в отношении $\frac{\lambda}{\delta}$.

Аналогичные результаты можно получить при рассмотрении другой проблемы. Пусть на металл действует — переменное электромагнитное поле, зависящее от времени по закону $e^{i\omega t}$.

Если магнитное поле у поверхности проводника $z = 0$ имеет значение H_0 граничное условие (5,4) позволяет сформулировать краевую задачу

$$\frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial H(z, t)}{\partial t}$$

$$H = H_0 \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$H \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Решение краевой задачи может быть написано аналогично (30,5)

$$H(z, t) = H_0 e^{i\omega t} e^{-\frac{z}{\delta}},$$

где толщина скин-слоя δ дается формулой (30,4).

Следует подчеркнуть, что скин-эффект становится все более резко выраженным при переходе к высоким частотам. Мы увидим в следующей главе, что в полях высокой частоты, когда поля нельзя более считать квазистационарными, по-прежнему имеет место скин-эффект, хотя глубина проникновения оказывается, вообще говоря, иной (см. § 33). Скин-эффект играет большую роль в технике переменных токов. Он позволяет применять полые кабели или кабели, покрытые слоем металла с особенно высокой проводимостью, что снижает расход материалов и мощностей.

§ 31. Электромагнитные волны в однородной изотропной среде

Рассмотрим распространение электромагнитного поля в пространственно однородной и изотропной среде, характеризуемой материальными постоянными ε_0, μ_0 и σ в среде без пространственной дисперсии. Индекс нуль означает, что материальные постоянные имеют статическое значение и отнесены к частоте $\omega = 0$. Ниже мы обсудим условия применимости этого допущения.

Среду мы будем считать неферромагнитной ($\mu_0 = 1$). Мы видели выше, что у металлов глубина проникновения поля весьма мала даже при сравнительно невысоких частотах. Поэтому не имеет смысла рассматривать распространение электромагнитного поля внутри металла. Однако такое рассмотрение уместно в средах с меньшими, чем у металлов, значениями проводимости: в полупроводниках или растворах электролитов. В предельном случае $\sigma \to 0$ мы перейдем к случаю идеальных диэлектриков. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{31,1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{31,2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \tag{31,3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{31,4}$$

Взяв ротор от первого уравнения и учитывая последнее, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -\Delta \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{E},$$

или, пользуясь (31,2),

$$\Delta \boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{31,5}$$

Поступая аналогично с (31,2), легко прийти к уравнению

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{31,6}$$

Будем пытаться искать решения уравнения (31,5), (31,6) в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси абсцисс. Положим, что решения (31,5), (31,6) имеют вид

$$\boldsymbol{H}(x, t) = \boldsymbol{H}_0(x) e^{i\omega t}, \tag{31,7}$$

$$\boldsymbol{E}(x, t) = \boldsymbol{E}_0(x) e^{i\omega t}. \tag{31,8}$$

Подставляя (31,7) в (31,5), находим

$$\frac{d^2 \boldsymbol{H}_0(x)}{dx^2} + k^2 \boldsymbol{H}_0(x) = 0, \tag{31,9}$$

где через k обозначена комплексная величина

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0 - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}. \tag{31,10}$$

Введем важное понятие комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ в проводящей среде, определив ее соотношением

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)} = k_0\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \qquad (31,11)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в вакууме. Из (31,10) следует, что

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \qquad (31,12)$$

Эта важная формула устанавливает связь между диэлектрической проницаемостью и проводимостью. Представим, далее, комплексную величину $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ в виде

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\varkappa. \qquad (31,13)$$

Величины n и $\varkappa$ называются, соответственно, коэффициентами преломления и поглощения. Знак перед $\varkappa$ выбирается так, чтобы мнимая часть k была существенно отрицательна (при $\varkappa > 0$). Причина такого выбора очевидна из дальнейшего.

Решение (31,7) имеет вид

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}_1 e^{-k_0\varkappa x} e^{i(\omega t - k_0 n x)}, \qquad (31,14)$$

где вектор $\boldsymbol{A}_1$ — комплексная амплитуда. Аналогично для электрического поля можно написать

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_2 e^{-k_0\varkappa x} e^{i(\omega t - k_0 n x)}. \qquad (31,15)$$

В случае произвольного направления распространения векторы поля можно представить в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}_1 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \qquad (31,16)$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_2 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \qquad (31,17)$$

где $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор, $\boldsymbol{k} = k\cdot\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}_0$ — единичный вектор в направлении распространения волны. Связь между векторами $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ можно определить, подставляя их выражения в (31,2):

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -i[\boldsymbol{kE}] = -ik[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{E}] = -i\frac{\omega}{c}\sqrt{n^2-\varkappa^2}\,[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{E}]\,e^{-i\,\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{n}},$$

откуда находим

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{n^2+\varkappa^2}\,[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{E}]\,e^{-i\,\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{n}}. \qquad (31,18)$$

В отличие от случая распространения электромагнитных волн в вакууме, амплитуды электрического и магнитного полей оказываются различными. Однако, как и в вакууме, электромагнитные волны в однородной и изотропной среде являются поперечными. Действительно, подставляя (31,16) и (31,17) в (31,3) и (31,4), находим

$$(\boldsymbol{kE}) = (\boldsymbol{kH}) = 0. \tag{31,1}$$

Формулы (31,16)—(31,19) показывают, что уравнения Максвелла в однородной и изотропной среде, как и в вакууме, допускают решения в виде плоских поперечных волн с волновым числом k и произвольной частотой ω. Однако в среде происходит затухание волн по экспоненциальному закону. Эффективность затухания определяется величиной $\varkappa$. Найдем значения n и $\varkappa$ из (31,12), (31,13). Возводя (31,13) в квадрат, приравнивая (31,12) и разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\left.\begin{aligned} n^2 - \varkappa^2 &= \varepsilon_0, \\ \varkappa n &= \frac{2\pi\sigma}{\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{31,20}$$

Решение (31,20) дает

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} + \varepsilon_0\right)}, \tag{31,21}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} - \varepsilon_0\right)}. \tag{31,22}$$

Знаки корней выбираются так, чтобы n и $\varkappa$ имели вещественные значения и, кроме того, $\varkappa$ было положительным.

Формулы (31,21), (31,22) определяют закон дисперсии в среде с проводимостью. Следует заметить, что при достаточно высоких частотах проводимость σ также оказывается зависящей от частоты.

Рассмотрим предельные случаи формул (31,21) и (31,22). Если имеет место неравенство

$$\sigma \ll \frac{\varepsilon_0\omega}{4\pi}, \tag{31,23}$$

то это означает, что ток проводимости σE мал по сравнению с током смещения $\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t} \sim \frac{\varepsilon_0\omega}{4\pi}E$. Это имеет место как в идеальных диэлектриках (у которых $\sigma \to 0$), так и у реальных диэлектриков, обладающих весьма низкой проводимостью, а также у проводников неметаллического типа (полупроводники, электролиты) при достаточно высоких частотах.

В этом случае формулы (31,21) и (31,22) можно упростить, представив их в виде

$$n \simeq \sqrt{\varepsilon_0}, \tag{31,24}$$

$$\varkappa \simeq \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{31,25}$$

При этом, в силу неравенства (31,23), имеет место также неравенство

$$n \gg \varkappa.$$

Если полностью пренебречь величиной $\varkappa$, которая, строго говоря, равна нулю только в идеальном диэлектрике, то среду называют прозрачной. В прозрачной среде формулы для векторов поля упрощаются и приобретают вид

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{31,26}$$

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\varepsilon_0}\,\boldsymbol{A}e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{31,27}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\boldsymbol{k}_0, \tag{31,28}$$

где v — фазовая скорость распространения волн,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{31,29}$$

Последняя формула оправдывает название величины n. Действительно, как известно (см. § 37), показателем преломления именуют отношение скоростей распространения электромагнитных волн в вакууме и в среде

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_0}. \tag{31,30}$$

Электромагнитные волны в непроводящей среде отличаются от волн в вакууме только скоростью распространения, которая меньше скорости света c в пустоте в $\sqrt{\varepsilon_0}$ раз. Кроме того, амплитуды электрического и магнитного полей относятся друг к другу как

$$\frac{|\boldsymbol{H}|}{|\boldsymbol{E}|} = \sqrt{\varepsilon_0} = n. \tag{31,31}$$

Полученные соотношения, установленные Максвеллом, играли важную историческую роль в теории электромагнитного поля. В частности, формула (31,30) установила связь между электромагнитными и оптическими явлениями, которые до работ Фарадея и Максвелла считались совершенно независимыми.

Формула (31,30) была подвергнута широкой экспериментальной проверке для большого числа жидкостей и газов. Было обнаружено хорошее согласие с опытом для ряда жидкостей и газов в видимой и инфракрасной частях спектра. Однако соотношение (31,30) совершенно не выполняется для жидкостей (например, воды) и газов, молекулы которых имеют значительный собственный дипольный момент. Другие ограничения применимости (31,30) связаны с существенным поглощением и дисперсией.

В случае слабого поглощения удобно представить $\sqrt{\varepsilon}$ в виде

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = \sqrt{n^2+\varkappa^2}\, e^{-i \operatorname{arctg} \frac{\varkappa}{n}} \tag{31,32}$$

и записать формулы для векторов поля в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} e^{-\varkappa \boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{r}} e^{i(\omega t - n\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})}, \tag{31,33}$$

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{n^2+\varkappa^2}\,[\boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{E}]\, e^{-i \operatorname{arctg} \frac{\varkappa}{n}}. \tag{31,34}$$

Напряженность магнитного поля отстает от напряженности электрического поля по фазе на величину $\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{n}$.

Найдем еще среднюю (по времени) плотность энергии электромагнитного поля в слабопоглощающей среде. Имеем, очевидно,

$$\overline{\frac{\varepsilon_0}{8\pi} E^2} = \frac{\varepsilon_0 A^2}{16\pi} e^{-2\varkappa x},$$

$$\frac{\overline{H^2}}{8\pi} = \frac{n^2+\varkappa^2}{16\pi} A^2 e^{-2\varkappa x} \simeq \frac{\varepsilon_0 A^2}{16\pi} e^{-2\varkappa x},$$

поскольку $n^2+\varkappa^2 \simeq n^2 = \sqrt{\varepsilon_0}$. Как и в вакууме, энергия электрического и магнитного полей в волне близки друг к другу.

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда ток проводимости велик по сравнению с током смещения. Формально этот случай сразу получается из формул для дисперсии при низких частотах и большой проводимости. Имеем, очевидно,

$$\varkappa \cong \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \tag{31,35}$$

$$n \simeq \varkappa \simeq \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}. \tag{31,36}$$

Как показывает сравнение (31,35) с (31,4), затухание поля в среде происходит на толщине скин-слоя. Это — случай большого поглощения.

Ясно, однако, что последние формулы имеют несколько условный характер, поскольку трудно говорить о распространении волн, если они затухают на толщине скин-слоя.

В заключение напишем закон сохранения энергии в среде с частотной дисперсией. Считая среду находящейся в состоянии термодинамического равновесия при постоянной температуре, можно написать для изменения внутренней энергии в единице объема

$$\frac{dU_0}{dt}=\frac{dQ}{dt}+\frac{dW}{dt}=\frac{dQ}{dt}+\frac{E}{8\pi}\frac{dD}{dt}. \tag{31,37}$$

Усредним равенство (31,37) по времени, считая, что температура поддерживается постоянной. При этом в среднем энергия среды в периодическом внешнем поле остается постоянной, так что для выделения тепла получаем

$$\overline{\frac{dQ}{dt}}=-\overline{\frac{E}{8\pi}\frac{dD}{dt}}.$$

Полагая

$$D=[\varepsilon_1(\omega)+i\varepsilon_2(\omega)](E_0\cos\omega t+iE_0\sin\omega t),$$

имеем

$$\overline{\frac{dQ}{dt}}=\frac{\varepsilon_2\omega E_0^2}{8\pi}. \tag{31,38}$$

Таким образом, в среде происходит выделение тепла, определяемое величиной $\varepsilon_2(\omega)$. Формула (31,38) имеет смысл, если это выделение тепла происходит так, чтобы оно успевало отводиться и температура среды поддерживалась постоянной. Поскольку тепло только выделяется, $Q\geqslant 0$ всегда и, соответственно,

$$\varepsilon_2\geqslant 0. \tag{31,39}$$

Знак $\varepsilon_1(\omega)$ может быть как положительным, так и отрицательным.