ГЛАВА V

ПОЛЯ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

§ 32. Дисперсионные соотношения

Мы указывали уже в § 6, что при высоких частотах, когда частота излучения сравнима с его характерными атомными частотами, а его длина волны сравнимой с размерами пространственных неоднородностей в среде, наступает явление дисперсии.

В случае однородной и изотропной среды общую формулу (6,5) можно представить в виде

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int \varepsilon(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t-t')\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', t')\,dV'. \tag{32,1}$$

Функция $\varepsilon(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t-t')$ зависит только от модуля разности координат, поскольку в однородной среде нет выделенных точек. Вклад в ε дает изменение поляризации, которое за время $t-t'$ передается на расстояние $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$. Интеграл берется только по прошедшему, чтобы удовлетворить принципу причинности. Очевидно, что $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| < c(t-t')$, но для простоты мы не будем учитывать это ограничение[1]).

Разложим электрическое поле и индукцию в интеграл Фурье:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)\, e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{32,2}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)\, e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\, d\boldsymbol{k}\, d\omega. \tag{32,3}$$

Тогда, подставляя в (32,1), находим

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{32,4}$$

---

[1]) См. М. А. Леонтович, ЖЭТФ, 907 (1961).

где обозначено

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt \int \varepsilon(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|, t - t') e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} e^{+i\omega(t-t')} dV' =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau) e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{R} - \omega\tau)} d\boldsymbol{R}. \qquad (32,5)$$

При этом введены новые переменные $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ и $\tau = t - t'$. Введенная нами функция $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ не является фурье-образом $\varepsilon(k, \tau)$, поскольку интеграл по τ берется в пределах от нуля до бесконечности. Именно функция $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ (а не $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau)$ имеет основное значение, поскольку согласно (32,4) она связывает между собой векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$; она называется диэлектрической проницаемостью, зависящей от частоты и волнового вектора.

Заметим, что зависимость $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ от волнового вектора $\boldsymbol{k}$ связана с зависимостью $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau)$ от пространственных координат $\boldsymbol{R}$, т. е. с учетом пространственной дисперсии.

Если длина волны мала по сравнению с пространственными неоднородностями, то можно считать диэлектрическую проницаемость функцией только от $(t - t')$ и вместо (32,5) написать более простое соотношение:

$$\varepsilon(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \qquad (32,6)$$

в котором диэлектрическая проницаемость зависит только от частоты. При этом соотношение (32,4) упрощается и превращается в

$$\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \boldsymbol{E}(\omega). \qquad (32,7)$$

Подчеркнем, что если диэлектрическая проницаемость зависит от частоты, то именно уравнение (32,7) является правильной формой записи уравнения связи. Часто приводимое в старых руководствах соотношение

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon(\omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t),$$

где $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ — сами векторы, а не их фурье-амплитуды, как в (32,7), не имеет никакого смысла. Если ε является функцией частоты, то в равенстве (32,7) должны стоять величины, относящиеся к той же частоте.

Функция $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ является, вообще говоря, комплексной и может быть записана в виде

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon^{\mathrm{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) + i\varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{32,8}$$

Очевидно, что вещественная и мнимая части

$$\varepsilon^{\mathrm{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) + \varepsilon^*(\boldsymbol{k}, \omega)}{2}, \tag{32,9}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) - \varepsilon^*(\boldsymbol{k}, \omega)}{2i}. \tag{32,10}$$

Кроме того, из определения (32,5) следует, что

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon^*(-\boldsymbol{k}, -\omega). \tag{32,11}$$

Подставляя в (32,9) выражение (23,5), с учетом (32,11) находим

$$\varepsilon^{\mathrm{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)}\, d\boldsymbol{R}. \tag{32,12}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}, \omega) &= \frac{1}{2i}\int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)}\, d\boldsymbol{R} - \\ &\quad - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)}\, d\boldsymbol{R} = \\ &= \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)}\, \mathrm{sgn}(\tau)\, d\boldsymbol{R},\end{aligned} \tag{32,13}$$

где знаковая функция $\mathrm{sgn}\,\tau$ определена по формуле (III, 16). Мы видим, что как вещественная, так и мнимая части $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ выражаются через $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)$ по формулам (32,12) и (32,13), поэтому их можно связать между собой.

Именно, поскольку формула (32,13) представляет фурье-преобразование $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau)$, обращая это преобразование, находим

$$\mathrm{sgn}(\tau)\, \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|) = \frac{2i}{(2\pi)^4}\int\int \varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}', \omega)\, e^{i(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{R}-\omega'\tau)}\, d\boldsymbol{k}'\, d\omega'. \tag{32,14}$$

Подставляя значение $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)$ из (32,14) в (32,13), находим

$$\varepsilon^{\mathrm{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d\omega' \int d\boldsymbol{k}' \int d\boldsymbol{R} \varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}', \omega') \operatorname{sgn}(\tau) \times$$

$$\times e^{i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}} e^{-i(\omega-\omega')\tau} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\omega' \, d\boldsymbol{k}' \times$$

$$\times \varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}', \omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')\tau} \operatorname{sgn}\tau \, d\tau \int e^{i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}} d\boldsymbol{R} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')\tau} \operatorname{sgn}\tau \, d\tau \int e^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}', \omega') \delta(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}) \, d\boldsymbol{k} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int d\omega' \varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}, \omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')\tau} \operatorname{sgn}(\tau) \, d\tau.$$

Внутренний интеграл можно вычислить, воспользовавшись формулой (III, 17) для $\operatorname{sgn}(\tau)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\tau) e^{-i(\omega-\omega')\tau} d\tau = \frac{i}{\pi} \frac{1}{\omega-\omega'},$$

откуда

$$\varepsilon^{\mathrm{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}, \omega')}{(\omega-\omega')} d\omega'. \tag{32,15}$$

Интеграл в формуле (32,15) берется в смысле главного значения. Совершенно аналогичные вычисления — обращение формулы (32,12) и подстановка в (32,13) — дает

$$\varepsilon^{\mathrm{im}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{\mathrm{re}}(\boldsymbol{k}, \omega')}{(\omega-\omega')} d\omega'. \tag{32,16}$$

Формулы (32,15) и (32,16) носят название формул Крамерса — Кронига, или дисперсионных соотношений. Они связывают между собой вещественную и мнимую части диэлектрической проницаемости, иными словами, характеристики процесса рассеяния и поглощения. Все сделанные выкладки могут быть перенесены на уравнение связи $\mu(\boldsymbol{k}, \omega)$, и точно такие же соотношения могут быть написаны для вещественной и мнимой частей магнитной проницаемости. Таким образом, оказывается установленным общий принцип, согласно которому вещественная и мнимые части основных величин характеризующих свойств среды — $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $\mu(\boldsymbol{k}, \omega)$ — не являются независимыми, но связаны между собой Поскольку, согласно (32,12), электропроводность связана с диэлектрической проницаемостью, полученный результат в равной мере относится и к электропроводности.

Формулы Крамерса — Кронига являются одним из самых общих соотношений электродинамики Действительно, при их выводе было сделано только два предположения· 1) существование причинной связи: значение функции D в момент t может определяться процессами поляризации только в предшествующие моменты времени; 2) допустимость разложения всех функций в интеграл Фурье Последнее выполнено практически для всех функций, описывающих физические процессы Таким образом, формулы Крамерса — Кронига устанавливают, в самом общем виде, связь между величинами, характеризующими процессы типа рассеяния (вещественная часть ε, μ или σ) и поглощения (мнимая часть этих величин) Процессы рассеяния и поглощения оказываются связанными между собой Иллюстрации этого общего положения встречаются в самых различных разделах физики, в частности, в квантовой механике и теории элементарных частиц (см. т II) Наряду с принципиальной важностью, формулы Крамерса — Кронига имеют важное практическое значение. Мнимая часть диэлектрической проницаемости связана с поглощением энергии в среде (см. § 31) и может быть сравнительно просто найдена экспериментально При этом вещественную часть ε^{re} находят по формуле Крамерса — Кронига

§ 33. Электромагнитное поле в среде с пространственной и временно́й дисперсией

Полученные ранее решения уравнений Максвелла в виде поперечных электромагнитных волн оказываются не только количественно, но и качественно неприменимыми в случае распространения электромагнитных волн в среде с пространственной дисперсией

Как мы подчеркивали в § 6, явление пространственной дисперсии становится существенным в том случае, когда длина волны становится сравнимой с размерами пространственных неоднородностей среды При этом значение индукции в данной точке $\boldsymbol{r}$ пространства, согласно (6,5), оказывается зависящим от значения вектора поля и свойств среды в окружающей ее области пространства (совокупности точек $\boldsymbol{r}'$)

Обычно говорят о «нелокальной связи» между соответствующими величинами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$

До самых последних лет считалось, что в макроскопически неоднородных средах можно не учитывать явления пространственной дисперсии Однако оказалось, что в весьма широком