связаны между собой Поскольку, согласно (32,12), электропроводность связана с диэлектрической проницаемостью, полученный результат в равной мере относится и к электропроводности.

Формулы Крамерса — Кронига являются одним из самых общих соотношений электродинамики Действительно, при их выводе было сделано только два предположения: 1) существование причинной связи: значение функции $\boldsymbol{D}$ в момент t может определяться процессами поляризации только в предшествующие моменты времени; 2) допустимость разложения всех функций в интеграл Фурье Последнее выполнено практически для всех функций, описывающих физические процессы Таким образом, формулы Крамерса — Кронига устанавливают, в самом общем виде, связь между величинами, характеризующими процессы типа рассеяния (вещественная часть ε, μ или σ) и поглощения (мнимая часть этих величин) Процессы рассеяния и поглощения оказываются связанными между собой Иллюстрации этого общего положения встречаются в самых различных разделах физики, в частности, в квантовой механике и теории элементарных частиц (см. т II) Наряду с принципиальной важностью, формулы Крамерса — Кронига имеют важное практическое значение. Мнимая часть диэлектрической проницаемости связана с поглощением энергии в среде (см. § 31) и может быть сравнительно просто найдена экспериментально При этом вещественную часть ε^{re} находят по формуле Крамерса — Кронига

§ 33. Электромагнитное поле в среде с пространственной и временно́й дисперсией

Полученные ранее решения уравнений Максвелла в виде поперечных электромагнитных волн оказываются не только количественно, но и качественно неприменимыми в случае распространения электромагнитных волн в среде с пространственной дисперсией

Как мы подчеркивали в § 6, явление пространственной дисперсии становится существенным в том случае, когда длина волны становится сравнимой с размерами пространственных неоднородностей среды При этом значение индукции в данной точке $\boldsymbol{r}$ пространства, согласно (6,5), оказывается зависящим от значения вектора поля и свойств среды в окружающей ее области пространства (совокупности точек $\boldsymbol{r}'$)

Обычно говорят о «нелокальной связи» между соответствующими величинами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$

До самых последних лет считалось, что в макроскопически неоднородных средах можно не учитывать явления пространственной дисперсии Однако оказалось, что в весьма широком классе макроскопически однородных сред, именуемых плазмоподобными, пространственная дисперсия играет важную роль. К таким средам относят как саму плазму (свойства которой будут разобраны в гл. VI), так и проводники — металлы и полупроводники с высокой электропроводностью, когда приходится изучать их взаимодействие с высокочастотными полями.

В таких средах существуют характерные неоднородности сравнительно большого масштаба. В виде примера можно привести длину свободного пробега электронов в металлах, которая будет вычислена в ч VI. Длина свободного пробега составляет около 10^{-6}—10^{-5} *см*

Другой пример пространственной неоднородности, относящийся к плазме, будет приведен в § 46

Важная роль, которую играют плазмоподобные среды в современной физике, сделала весьма актуальным изучение свойств сред с пространственной дисперсией.

Рассмотрим макроскопически однородную и изотропную ненамагничивающуюся ($\mu \sim 1$) среду, без токов и свободных зарядов. Будем пытаться искать решение уравнений Максвелла в виде разложений в интеграл Фурье. Этот метод в настоящее время стал одним из самых популярных и часто применяемых. Напишем разложения в виде

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{33,1}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{33,2}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{33,3}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega. \tag{33,4}$$

Подставляя в уравнения Максвелла эти разложения, находим

$$i\,[\boldsymbol{kH}(\boldsymbol{k}, \omega)] = -i\,\frac{\omega}{c}\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{33,5}$$

$$i\,[\boldsymbol{kE}(\boldsymbol{k}, \omega)] = i\,\frac{\omega}{c}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{33,6}$$

$$(\boldsymbol{kD}) = 0, \tag{33,7}$$

$$(\boldsymbol{kB}) = 0. \tag{33,8}$$

Таким образом, задача об интегрировании системы уравнений в частных производных свелась к задаче о решении системы алгебраических уравнений и последующего обращения формул преобразования Фурье.

Для того чтобы эти соотношения приобрели конкретный смысл, следует написать уравнения связи для $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega)$ соответственно.

Введем диэлектрическую проницаемость, связывающую $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$. Заметим при этом, что, поскольку проницаемость зависит от $\boldsymbol{k}$, даже в изотропной среде она является не скалярной, но тензорной величиной.

Именно, поскольку она может зависеть от вектора $\boldsymbol{k}$, а направление вектора $\boldsymbol{k}$ является единственным выделенным направлением в изотропной среде, для определения проницаемости мы должны составить симметричный тензор второго ранга, содержащий только единичный тензор δ_{ij} и компоненты вектора $\boldsymbol{k}$.

Единственный симметричный тензор второго ранга ε_{ij}, который можно составить из этих величин, имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k}, \omega)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) + \varepsilon_{\parallel}\frac{k_i k_j}{k^2}. \qquad (33,9)$$

Если выбрать направление волнового вектора за ось z, то можно написать для ε_{ij} явное выражение

$$\varepsilon_{ij} = \left|\begin{matrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{matrix}\right|. \qquad (33,10)$$

Изотропная среда при наличии пространственной дисперсии характеризуется двумя диэлектрическими проницаемостями: продольной $\varepsilon_{\parallel}$ и перпендикулярной $\varepsilon_{\perp}$. Причина такого наименования будет ясна из дальнейшего. Разумеется, что $\varepsilon_{\parallel}$ и $\varepsilon_{\perp}$ являются функциями $\boldsymbol{k}$ и ω.

Если пространственная дисперсия отсутствует, то диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(t - t')$ зависит только от времени. Соответственно ε_{ij} в (33,9) должно зависеть только от ω, но не от $\boldsymbol{k}$. При этом следует положить

$$\varepsilon_{\perp}(\omega) = \varepsilon_{\parallel}(\omega) = \varepsilon(\omega), \qquad (33,11)$$

тогда

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}. \qquad (33,12)$$

Уравнения связи для фурье-компонент в среде с пространственной дисперсией будет иметь вид

$$D_i(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) E_j(\boldsymbol{k}, \omega). \qquad (33,13)$$

Умножая (33,6) векторно на $\boldsymbol{k}$, имеем

$$-[\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}]] = k^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}) = -\frac{\omega}{c}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}].$$

Подставляя в правую сторону значение векторного произведения из (33,5) и учитывая, что $\mu=1$, находим

$$k^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E})=\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{D}, \tag{33,14}$$

или

$$\{k^2\delta_{ij}-k_ik_j\}E_j=\frac{\omega^2}{c^2}D_i.$$

Пользуясь уравнением связи (33,13), получаем окончательно

$$\left\{k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right\}E_j=0. \tag{33,15}$$

Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений (33,15) имела нетривиальное решение, необходимо выполнение условия

$$k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}=0. \tag{33,16}$$

Последнее выражение определяет зависимость ε_{ij} от $\boldsymbol{k}$ и ω, т. е. представляет дисперсионное уравнение. Заметим, прежде всего, что, учитывая определение (33,9) и выбирая направление вектора $\boldsymbol{k}$ за ось z ($k_x=k_y=0$; $k_z=k$), можно записать уравнение (33,16) в виде системы алгебраических уравнений

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\omega)-k^2=0, \tag{33,17}$$

$$\varepsilon_{\parallel}\equiv\varepsilon_{zz}=0. \tag{33,18}$$

Уравнения (33,18) и (33,17) являются независимыми дисперсионными уравнениями для электромагнитных волн, могущих распространяться в среде с пространственной дисперсией. Мы видим, что в такой среде возможно существование системы двух независимых волновых процессов: поперечных волн, для которых справедлив закон дисперсии (33,17), и продольных, для которых закон дисперсии дается формулой (33,18). У поперечных волн вектор электрического поля $\boldsymbol{E}_{\perp}$ имеет отличные от нуля компоненты E_x и E_y; у продольных волн поле имеет одну компоненту E_z Во избежание недоразумений укажем, что для продольных волн выполнено условие (33,7), так что вектор $\boldsymbol{D}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{k}$ (направлению распространения). Однако векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, в силу (33,14), не параллельны друг другу. Появление продольных электромагнитных волн, именуемых часто волнами поляризации, является специфическим эффектом, связанным с пространственной дисперсией среды Продольные электромагнитные волны в среде с пространственной дисперсией имеют простой смысл. рассмотрим среду с равновесным, но неоднородным распределением заряда и допустим, что на такую среду действует электромагнитное поле с длиной волны, сравнимой с размерами неоднородности. Поле вызывает смещение зарядов (создает поляризацию), нарушая равновесное распределение. В результате в среде возникают колебания зарядов, весьма сходные с упругими звуковыми волнами в изотропных средах.

Более конкретная количественная картина распространения продольных волн будет развита в § 46 для случая плазмы. Там же мы получим явные выражения для $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ и, с помощью уравнений (33,17) и (33,18), закон дисперсии в плазме $\omega_\perp(k)$ и $\omega_\parallel(k)$ для поперечных и продольных волн.

В случае пространственно однородной среды уравнение дисперсии превращается в уравнение

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) = 0, \tag{33,19}$$

совпадающее с (31,11) и определяющее однозначно частоту волн $\omega(k)$.

Поскольку, в силу (33,11), в такой среде $\varepsilon_\parallel = \varepsilon(\omega) \neq 0$, единственное возможное решение уравнения (33,15) гласит:

$$E_\parallel \equiv E_z = 0.$$

Таким образом, в соответствии с результатами § 31, в среде без пространственной дисперсии могут распространяться только поперечные волны.

Заметим, что дисперсионные уравнения и остальные основные свойства волн были получены нами без нахождения векторов поля как функций координат и времени. Последнее требует обращения интеграла Фурье, которое, согласно (33,1)—(33,4) и (33,13), может быть фактически выполнено, если известен в явном виде закон дисперсии. На практике часто основной интерес представляет именно закон дисперсии. Вычисление векторов поля по формулам (33,1)—(33,4), представляющее основную трудность, часто вообще можно не проводить. В этом — главное преимущество использования метода интеграла Фурье.

В заключение найдем связь между тензором ε_{ij} и тензором электропроводности σ_{ij} в среде с пространственной дисперсией. Поскольку соотношение

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j$$

имеет универсальный характер, то, подставляя в него разложения соответствующих векторов в интеграл Фурье и используя выражения (33,13) и определение тензора электропроводности $j_i = \sigma_{ij} E_j$, получим:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}. \qquad (33,20)$$

Эта формула является непосредственным обобщением формулы (31,12), полученной в отсутствие пространственной дисперсии.

§ 34. Дисперсия света

Мы разбирали в §§ 36 и 37 ч. I эффект рассеяния электромагнитных волн свободными и связанными электронами. Сейчас мы рассмотрим тот же эффект с несколько иной точки зрения. Именно, вычислим диэлектрическую проницаемость среды, содержащей связанные электроны, рассеивающие излучение.

В качестве простейшей среды будет рассматриваться разреженный газ, в котором поляризация $\boldsymbol{P}$ равна

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{d},$$

где N — число рассеивающих зарядов и $\boldsymbol{d}$ — приобретаемый каждым из них дипольный момент. Согласно (37,2) ч. I для $\boldsymbol{d}$ имеем

$$\boldsymbol{d} = \frac{e^2}{m}\frac{\boldsymbol{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma},$$

где ω_0 — собственная частота осциллятора.

Поле $\boldsymbol{E}$ в разреженном газе равно внешнему полю. Поэтому

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}\left(1 + 4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right) \qquad (34,1)$$

и, следовательно, для диэлектрической проницаемости можно написать, пользуясь определением (31,13):

$$\varepsilon = (n - i\varkappa)^2 = 1 + \frac{4\pi e^2}{m}\frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \qquad (34,2)$$

В достаточно разреженном газе второе слагаемое в (34,2), пропорциональное числу электронов в единице объема, по модулю мало по сравнению с единицей при всех частотах. Поэтому можно написать приближенно

$$n - i\varkappa \approx 1 + \frac{2\pi e^2}{m}\frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}.$$