

выражения (33,13) и определение тензора электропроводности $j_i = \sigma_{ij} E_j$, получим:

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} - i \frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}. \quad (33,20)$$

Эта формула является непосредственным обобщением формулы (31,12), полученной в отсутствие пространственной дисперсии.

§ 34. Дисперсия света

Мы разбирали в §§ 36 и 37 ч. I эффект рассеяния электромагнитных волн свободными и связанными электронами. Сейчас мы рассмотрим тот же эффект с несколько иной точки зрения. Именно, вычислим диэлектрическую проницаемость среды, содержащей связанные электроны, рассеивающие излучение.

В качестве простейшей среды будет рассматриваться разреженный газ, в котором поляризация \mathbf{P} равна

$$\mathbf{P} = N\mathbf{d},$$

где N — число рассеивающих зарядов и \mathbf{d} — приобретаемый каждым из них дипольный момент. Согласно (37,2) ч. I для \mathbf{d} имеем

$$\mathbf{d} = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega},$$

где ω_0 — собственная частота осциллятора.

Поле \mathbf{E} в разреженном газе равно внешнему полю. Поэтому

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{E} \left(1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) \quad (34,1)$$

и, следовательно, для диэлектрической проницаемости можно написать, пользуясь определением (31,13):

$$\epsilon = (n - i\kappa)^2 = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (34,2)$$

В достаточно разреженном газе второе слагаемое в (34,2), пропорциональное числу электронов в единице объема, по модулю мало по сравнению с единицей при всех частотах. Поэтому можно написать приближенно

$$n - i\kappa \approx 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (34,3)$$

$$\kappa = \frac{2\pi e^2 N}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (34,4)$$

Полученные формулы определяют хорошо измеряемые величины — показатель преломления и коэффициент поглощения излучения. Если бы газ моделировался системой осцилляторов

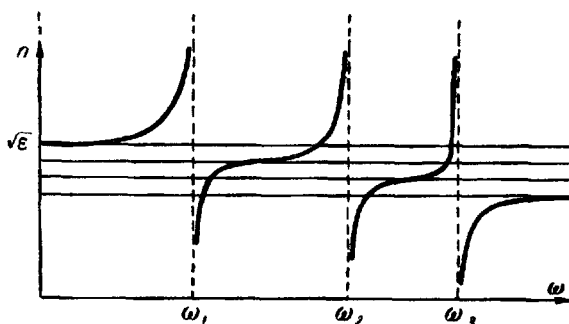


Рис. 96.

с собственными частотами $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0i}, \dots$, то в формулах (34,3) и (34,4) пришлось бы провести суммирование по различным сортам осцилляторов.

Разберем более детально зависимость n и κ от частоты излучения. Предположим прежде всего, что ω достаточно сильно отличается от собственных частот ω_{0i} . Тогда, пренебрегая $\gamma^2 \omega^2$ в знаменателе, получаем

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \quad (34,5)$$

$$2n\kappa = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_i \frac{N_i \omega \gamma}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2}. \quad (34,6)$$

Мы видим, что коэффициент поглощения κ в области $\omega \neq \omega_0$ весьма мал и для n можно написать

$$n \approx 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_l \frac{N_l}{\omega_{0l}^2 - \omega^2}. \quad (34,7)$$

Формула (34,7) выражает закон дисперсии в разреженном газе. Зависимость показателя преломления от частоты изображена на рис. 96. При приближении ω к ω_0 , n резко возрастает.

При ω , больших ω_0 , показатель преломления принимает весьма малое значение (см. ниже) и вновь возрастает с частотой. У каждого вещества имеется свой набор характерных частот ω_{0r} . В виде примера на рис. 12 мы ограничились тремя частотами.

Мы указывали уже в ч. I, что реальные микроскопические излучатели — атомы и молекулы — не подчиняются законам классической электродинамики. Тем не менее, гармонический осциллятор, как классическая модель излучающих систем, хорошо передает ряд основных свойств реальных излучателей. Это особенно ясно видно на примере дисперсии. В квантовой механике (см. § 108, ч. V) будет показано, что закон дисперсии выражается формулой

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m} \sum_r \frac{f_r}{\omega_r^2 - \omega^2}, \quad (34,8)$$

где ω_r — частоты переходов, связанные соотношением $\omega_r = \frac{E_r - E_0}{\hbar}$ с r -м и нижним уровнями энергии излучателя, а f_r — коэффициенты, удовлетворяющие условию $\sum f_r = 1$.

Сходство точной формулы (34,8) с классической модельной формулой (34,7) очевидно, хотя входящие в последнюю величины приобретают совершенно другой смысл.

В случае высоких частот, удовлетворяющих условию $\omega \gg \omega_r$, как квантовая, так и классическая формула для показателя преломления приобретают вид

$$n = 1 - \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2}. \quad (34,9)$$

Коэффициент преломления оказывается меньшим единицы и не зависящим от свойств вещества, за исключением лишь числа электронов в единице объема. Смысл полученного результата весьма прост: при рассеянии достаточно жесткого излучения связи электронов в атомах перестает играть заметную роль. Атомные электроны рассеивают излучение, как свободные. Показатель преломления n , определенный формулой (34,9), является показателем преломления среды, представляющей газ свободных электронов с плотностью N . Формула (34,9) применима в ультрафиолетовой области для элементов, находящихся в начале периодической системы, имеющих малую энергию связи электронов в атомах и в области рентгеновых лучей для элементов средней части и конца периодической системы.

Среда с $n < 1$ является оптически менее плотной, чем вакуум. Фазовая скорость электромагнитных волн в ней $v = \frac{c}{n} > c$ (ср. § 7, ч. II).

При падении на поверхность тела достаточно коротких электромагнитных волн может иметь место описанное ниже, в § 35, явление полного внутреннего отражения.

Интересно вычислить групповую скорость электромагнитных волн в рассматриваемой среде

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}.$$

Вычислим $\frac{dk}{d\omega}$, пользуясь (34,9):

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \frac{\omega}{v} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (\omega n) = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2} \right).$$

Отсюда

$$v_g = \frac{c}{1 + \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2}} \approx c \left(1 - \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2} \right) = cn.$$

Групповая скорость, как это и должно быть, оказывается меньше скорости света.

Вернемся теперь к общему случаю дисперсии и рассмотрим область частот $\omega \approx \omega_0$. В этом случае формула (34,5) теряет смысл, и следует вернуться к выражениям (34,3) — (34,4).

При $\omega \approx \omega_0$ можно написать

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx (\omega_0 - \omega) 2\omega_0.$$

Введем новую переменную

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$

тогда

$$n = 1 - \frac{2\pi e^2 N}{m\gamma\omega_0} \frac{x}{1+x^2},$$

$$k = \frac{2\pi e^2 N}{m\gamma\omega_0} \frac{1}{1+x^2}.$$

Кривые $k(x)$ и $(n(x) - 1)$ изображены на рис. 97. Мы видим, что при $x=0$ (т. е. $\omega = \omega_0$) имеет место максимальное поглощение. Это поглощение, или, точнее, экстинкция, связано с большой

величиной эффективного сечения рассеяния (ср. § 37 ч. I). Оно резко снижается с ростом x , достигая $1/2$ своего максимального значения при $x = \pm 1$. Показатель преломления в области $-1 < x < 1$ обнаруживает ход с x , совершенно отличный от

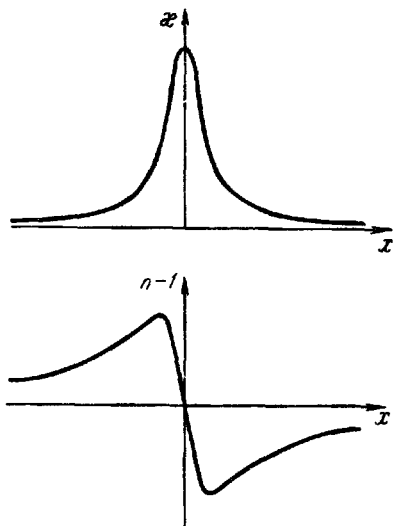


Рис. 97.

его хода при $|x| > 1$, изображенного на рис. 97. Если при $|x| > 1$ n растет с увеличением x , то при $x = \mp 1$ он достигает соответственно максимального и минимального значений. В интервале $-1 < x < 1$, $n(x)$ — не растущая, а падающая функция x , достигающая при $x = 0$ значения $n = 1$. Эта область, в которой показатель преломления падает с ростом частоты, носит название области аномальной дисперсии. В области аномальной дисперсии разреженный газ обладает наибольшей экстинкцией (минимумом прозрачности).

Мы вернемся еще к вопросам дисперсии в квантовой механике, где будет показано, что, кроме рассеяния без изменения частоты, возможно рассеяние света с изменением частоты (так называемое комбинационное рассеяние).

§ 35. Геометрическая оптика

Выше мы нашли закон распространения плоских электромагнитных волн в однородных прозрачных средах.

Непременным признаком плоской волны служит то обстоятельство, что поверхностью равной фазы является плоскость бесконечной протяженности.

Плоские электромагнитные волны особенно просты, так как их амплитуда и волновой вектор остаются постоянными в пространстве и во времени. Оказывается, что аналогичными свойствами при известных обстоятельствах и с некоторой степенью точности обладают произвольные электромагнитные волны.

Как будет показано ниже, для этого необходимо, чтобы кривизна волновой поверхности была достаточно мала в таких областях пространства, которые еще велики по сравнению с длиной волны.

Приближенная замена волновой поверхности плоскостью имеет очень большое практическое значение, поскольку в случае произвольной формы поверхности законы распространения волн оказываются весьма сложными.

Из сказанного ясно, что подобная замена оказывается во всяком случае допустимой, если длина волны весьма мала. Поэтому заслуживает особого рассмотрения предельный случай электромагнитных волн, длина которых $\lambda \rightarrow 0$.

Практически этому случаю отвечает уже область видимого света.

Действительно, длина волны видимого света составляет около $5 \cdot 10^{-5}$ см. Она всегда весьма мала по сравнению с размерами макроскопических тел и оптических приборов. По этой причине изучение законов распространения электромагнитных волн в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ получило название геометрической оптики.