его хода при $|x|>1$, изображенного на рис. 97. Если при $|x|>1$ n растет с увеличением x, то при $x=\mp 1$ он достигает соответственно максимального и минимального значений. В интервале $-1<x<1$, $n(x)$ — не растущая, а падающая функция x, достигающая при $x=0$ значения $n=1$. Эта область, в которой показатель преломления падает с ростом частоты, носит название области аномальной дисперсии. В области аномальной дисперсии разреженный газ обладает наибольшей экстинкцией (минимумом прозрачности).

Мы вернемся еще к вопросам дисперсии в квантовой механике, где будет показано, что, кроме рассеяния без изменения частоты, возможно рассеяние света с изменением частоты (так называемое комбинационное рассеяние).

§ 35. Геометрическая оптика

Выше мы нашли закон распространения плоских электромагнитных волн в однородных прозрачных средах.

Непременным признаком плоской волны служит то обстоятельство, что поверхностью равной фазы является плоскость бесконечной протяженности.

Плоские электромагнитные волны особенно просты, так как их амплитуда и волновой вектор остаются постоянными в пространстве и во времени. Оказывается, что аналогичными свойствами при известных обстоятельствах и с некоторой степенью точности обладают произвольные электромагнитные волны.

Как будет показано ниже, для этого необходимо, чтобы кривизна волновой поверхности была достаточна мала в таких областях пространства, которые еще велики по сравнению с длиной волны.

Приближенная замена волновой поверхности плоскостью имеет очень большое практическое значение, поскольку в случае произвольной формы поверхности законы распространения волн оказываются весьма сложными.

Из сказанного ясно, что подобная замена оказывается во всяком случае допустимой, если длина волны весьма мала. Поэтому заслуживает особого рассмотрения предельный случай электромагнитных волн, длина которых $\lambda \to 0$.

Практически этому случаю отвечает уже область видимого света.

Действительно, длина волны видимого света составляет около $5 \cdot 10^{-5}$ *см*. Она всегда весьма мала по сравнению с размерами макроскопических тел и оптических приборов. По этой причине изучение законов распространения электромагнитных волн в предельном случае $\lambda \to 0$ получило название геометрической оптики.

Ниже мы по той же причине будем иногда называть электромагнитную волну — световой и говорить о распространении света. Это не должно повести к недоразумениям. В прозрачной среде каждая из компонент векторов поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta F - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь через F обозначена произвольная компонента поля.

В ограниченной среде, помимо волнового уравнения, компоненты векторов поля должны еще удовлетворять граничным условиям. Поэтому компоненты векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны между собой некоторыми соотношениями и не являются совершенно независимыми. Однако достаточно далеко от границы раздела сред это обстоятельство можно не учитывать и считать все компоненты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ независимыми. Тогда волновое поле можно характеризовать скалярной величиной F.

Рассматривая монохроматическую волну, можем написать

$$F = f(x,\ y,\ z)\,e^{-i\omega t}.$$

Функция f удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\Delta f + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} f = 0.$$

Вводя волновое число $k = \frac{\omega}{c}$ и показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$, можно переписать последнее уравнение в виде

$$\Delta f + n^2k^2 f = 0. \tag{35,1}$$

Плоской волне отвечает решение уравнения (35,1)

$$f = ae^{iknr} = ae^{ik(n\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})} = ae^{ikl}, \tag{35,2}$$

где a — постоянная амплитуда и $l = n(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})$ — величина, именуемая обычно оптической длиной пути и являющаяся линейной функцией координат. Она отличается от геометрического пути множителем n.

Мы должны найти решения уравнения (35,1) в общем виде, не ограничиваясь плоской волной. При этом, однако, мы будем рассматривать предельный случай $\lambda \to 0$ или $k \to \infty$. Будем пытаться представить решение уравнения (35,1) в предельном случае весьма больших k, как

$$f = ae^{i\psi(x,\,y,\,z)}. \tag{35,3}$$

При этом величина ψ, именуемая эйконалом, представляется в виде, максимально приближающемся к виду фазы плоской волны

$$\psi = k\mathscr{L}(x,\ y,\ z),$$

где $\mathscr{L}(x, y, z)$ — функция координат, достаточно близкая к линейной.

Таким образом, будем пытаться искать решение (35,1) в виде

$$f = ae^{ik\mathscr{L}(x, y, z)}. \tag{35,4}$$

Вычислим производные от функции f:

$$\operatorname{grad} f = a \operatorname{grad} e^{ik\mathscr{L}} = ikae^{ik\mathscr{L}} \operatorname{grad} \mathscr{L};$$

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} e^{ik\mathscr{L}} = ikae^{ik\mathscr{L}} \Delta\mathscr{L} - k^2ae^{ik\mathscr{L}} (\operatorname{grad} \mathscr{L})^2.$$

Поэтому уравнение (35,1) приобретает вид

$$ikae^{ik\mathscr{L}} \Delta\mathscr{L} - k^2ae^{ik\mathscr{L}} (\operatorname{grad} \mathscr{L})^2 + n^2k^2ae^{ik\mathscr{L}} = 0,$$

или

$$(\operatorname{grad} \mathscr{L})^2 - \frac{i}{k} \Delta\mathscr{L} = n^2. \tag{35,5}$$

Величина $\mathscr{L}$ не зависит от k. Поэтому, если при $k \to \infty$ выполнено неравенство

$$|\operatorname{grad} \mathscr{L}|^2 \gg \frac{\Delta\mathscr{L}}{k}, \tag{35,6}$$

то в уравнении (35,5) можно перейти к пределу $k \to \infty$ и опустить второе слагаемое. При этом уравнение (35,5) приобретет вид

$$|\operatorname{grad} \mathscr{L}|^2 = n^2$$

или

$$(\operatorname{grad} \psi)^2 = n^2k^2. \tag{35,7}$$

В координатном представлении последнее уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = n^2k^2. \tag{35,7'}$$

Уравнение (35,7) носит название уравнения эйконала. При его выводе мы не делали каких-либо предположений о значениях показателя преломления n, который может быть произвольной функцией координат.

Зная решения уравнения (35,7), мы тем самым находим приближенное решение волнового уравнения (35,1), в предположении, что k достаточно большое число. В пределе $k \to \infty$ это решение совпадает с плоской волной, распространяющейся на направлении $\boldsymbol{n}$. Условием применимости уравнения (35,7) служит (35,6). Позднее мы обсудим, каким физическим условиям отвечает это неравенство и когда оно может не выполняться.

Если ψ — решение уравнения эйконала, то

$$\psi = k\mathscr{L}(x, y, z) = \text{const}$$

является уравнением поверхности равной фазы. Распространение электромагнитных волн происходит в направлении нормали к поверхности постоянного эйконала, т. е. в направлении вектора $\operatorname{grad}\mathscr{L}$. Направление распространения волн именуется направлением светового луча.

На малом участке пространства эйконал ψ можно разложить в ряд, написав

$$\psi \approx \frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} = k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} = k(\operatorname{grad}\mathscr{L})\boldsymbol{r}. \tag{35,8}$$

При этом для f, согласно (35,3), имеем

$$f = ae^{ik(\operatorname{grad}\mathscr{L})\boldsymbol{r}} = ae^{ikl}. \tag{35,9}$$

Оптический путь l оказывается равным $(\operatorname{grad}\mathscr{L})\boldsymbol{r}$.

Сравнивая (35,9) с (35,2), мы видим, что в рамках применимости геометрической оптики всякую волну можно на достаточно малом участке пространства рассматривать, как плоскую волну с волновым вектором, направленным по нормали к поверхности постоянного эйконала. В частности, в однородной среде с постоянным коэффициентом преломления $n = \text{const}$ из (35,7) следует, что

$$\operatorname{grad}\psi = \text{const}.$$

Это значит, что смежные поверхности равных значений эйконала находятся на равных расстояниях друг от друга. Нормали к этим поверхностям являются прямыми. Последнее утверждение имеет простой смысл: в однородной среде лучи света распространяются прямолинейно.

Мы не будем останавливаться на применении геометрической оптики к оптическим и электроннооптическим системам[1]). Обсудим лишь вопрос о смысле неравенства (35,6), служащего условием применимости приближения геометрической оптики.

Как известно из геометрии, величина $\Delta\psi$ определяет средний радиус кривизны слабо изогнутой поверхности $\psi = \text{const}$. Таким образом, неравенство (35,6) имеет простой геометрический смысл: оно означает, что средний радиус кривизны поверхности постоянного эйконала должен быть велик по сравнению с длиной волны λ. Иными словами, световое возмущение должно плавно изменяться от точки к точке. Условия применимости приближения геометрической оптики заведомо нарушаются в непосредственной близости к излучателю. Здесь изменение волнового поля от точки к точке происходит весьма быстро. Величина $\Delta\psi$ может иметь тот же порядок величины, что и длина волны.

---

[1]) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960, §§ 55—57; А. Рустергольц, Электронная оптика, ИЛ, 1952; М. Борн, Оптика, ОНТИ, 1937.

Рассмотрим второй важнейший случай, когда оказывается невозможным пользоваться представлениями геометрической оптики.

Пусть на пути световых лучей помещено совершенно непрозрачное тело, именуемое экраном. В приближении геометрической оптики световые лучи не проникают за экран (рис. 98). За непрозрачным экраном находится область тени.

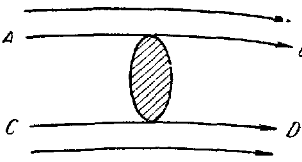

Рис. 98.

Рассмотрим границу, разделяющую освещенную область и область тени (прямые AB и CD на рис. 98). Здесь происходит скачкообразное изменение амплитуды от значения a до нуля. Поэтому производные от f по координатам на границе свет — тень обращаются в бесконечность. Здесь снова нарушаются условия применимости геометрической оптики. В следующем параграфе будут разобраны возникающие при этом физические явления.

§ 36. Дифракция

Как мы только что показали, на границе раздела освещенной и теневой областей использование приближения геометрической оптики и понятия прямолинейных световых лучей становится недопустимым.

Резкой границы этих областей, естественно, не может быть. В действительности, вблизи края непрозрачного экрана распространение света описывается неупрощенным волновым уравнением. Его решение с учетом граничных условий на поверхности экрана приводит к некоторому распределению интенсивности, отвечающему постепенному переходу от полной освещенности к тени. У границы раздела освещенной и теневой областей происходит отклонение от прямолинейного распространения света, как бы загибание лучей, получившее название дифракции.

Решение краевой задачи о дифракции оказывается весьма сложным. Поэтому были развиты специальные методы упрощенного расчета дифракционных явлений. Мы ограничимся обсуждением наиболее важного и вместе с тем простого случая.

Именно, пусть на некоторый экран с отверстием произвольной формы падает плоско-параллельный пучок лучей, т. е. пучок лучей от достаточно удаленного от экрана источника с интенсивностью I_0. У края экрана происходит дифракция света. Нас будет интересовать распределение интенсивности света на большом расстоянии от отверстия (большом по сравнению с его