

Рассмотрим второй важнейший случай, когда оказывается невозможным пользоваться представлениями геометрической оптики.

Пусть на пути световых лучей помещено совершенно непрозрачное тело, именуемое экраном. В приближении геометрической оптики световые лучи не проникают за экран (рис. 98). За непрозрачным экраном находится область тени.

Рассмотрим границу, разделяющую освещенную область и область тени (прямые AB и CD на рис. 98). Здесь происходит скачкообразное изменение амплитуды от значения a до нуля. Поэтому производные от f по координатам на границе свет—тень обращаются в бесконечность. Здесь снова нарушаются условия применимости геометрической оптики. В следующем параграфе будут разобраны возникающие при этом физические явления.

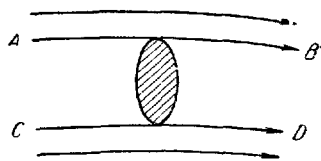


Рис. 98.

§ 36. Дифракция

Как мы только что показали, на границе раздела освещенной и теневой областей использование приближения геометрической оптики и понятия прямолинейных световых лучей становится недопустимым.

Резкой границы этих областей, естественно, не может быть. В действительности, вблизи края непрозрачного экрана распространение света описывается неупрощенным волновым уравнением. Его решение с учетом граничных условий на поверхности экрана приводит к некоторому распределению интенсивности, отвечающему постепенному переходу от полной освещенности к тени. У границы раздела освещенной и теневой областей происходит отклонение от прямолинейного распространения света, как бы загибание лучей, получившее название дифракции.

Решение краевой задачи о дифракции оказывается весьма сложным. Поэтому были развиты специальные методы упрощенного расчета дифракционных явлений. Мы ограничимся обсуждением наиболее важного и вместе с тем простого случая.

Именно, пусть на некоторый экран с отверстием произвольной формы падает плоско-параллельный пучок лучей, т. е. пучок лучей от достаточно удаленного от экрана источника с интенсивностью I_0 . У края экрана происходит дифракция света. Нас будет интересовать распределение интенсивности света на большом расстоянии от отверстия (большом по сравнению с его

размером). Такая дифракция, при которой источник света и точка наблюдения находятся на бесконечно больших расстояниях от дифрагирующего отверстия или экрана называется дифракцией Фраунгофера.

При дифракции Фраунгофера как падающие на экран с отверстием волны, так и прошедшие через отверстие волны на большом от него расстоянии можно считать плоскими. Волну, падающую на экран, мы будем называть первичной волной. Первичная волна, падающая на непрозрачный экран, полностью поглощается. Однако она проходит через отверстие в экране. Отверстие в экране становится излучателем электромагнитных волн в полупространство за экраном.

Каждая точка в сечении отверстия является источником вторичных сферических волн, достигающих точки наблюдения с некоторым запаздыванием.

Если $f_0 = \text{const } e^{-i\omega t}$ — значение какой-либо компоненты поля в некоторой точке r_0 , находящейся в сечении отверстия, то возмущение, приходящее из этой точки в точку наблюдения N , будет порядка $\frac{1}{R} f_0(\tau) = \text{const } e^{-i\omega\tau}$, где $\tau = t - \frac{R}{c}$ — время запаздывания (см. § 23 ч. I).

Полное поле в точке наблюдения получится на основании принципа суперпозиции суммированием по всем излучателям, т. е. по всему отверстию в экране.

Таким образом, в точке наблюдения N имеем

$$\begin{aligned} f_N &= \text{const} \cdot \int \frac{e^{-i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R} dS = \text{const } e^{-i\omega t} \int \frac{e^{i \frac{\omega}{c} R}}{R} dS = \\ &= \text{const} \cdot e^{-i\omega t} \int \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (36,1) \end{aligned}$$

При этом f означает любую из компонент электрического или магнитного полей. В том же приближении, что и в предыдущем параграфе, мы отвлекаемся от явлений поляризации, а также считаем все компоненты поля независимыми.

Формула (36,1) имеет вполне общий характер. При вычислении интеграла (36,1) мы будем иметь в виду, что расстояние до точки наблюдения велико по сравнению с размерами отверстия (дифракция Фраунгофера!).

Введем начало координат, поместив его в некоторой точке отверстия (рис. 99). Тогда можно, как обычно (см., например, § 15 или § 26 ч. I), написать

$$R = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| \approx r_0 - \mathbf{n}_0 \mathbf{r},$$

где $\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r}_0}{r}$ — единичный вектор в направлении \mathbf{r}_0 .

Величина $|r|$, изменяющаяся в пределах отверстия, мала по сравнению с $|r_0|$, но может быть не малой по сравнению с длиной волны. Поэтому член $(n_0 r)$ можно опустить в знаменателе формулы (36,1), но его необходимо удержать в экспоненте. Соответственно имеем

$$f \approx \frac{\text{const}}{r_0} e^{-i\omega t} e^{ikr_0} \int e^{-ikn_0 r} dS = A \int e^{-iqr} dS, \quad (36,2)$$

где $q = kn_0$ и через A обозначена совокупность множителей, стоящих перед интегралом. Значение этой константы будет выражено через интенсивность падающей волны.

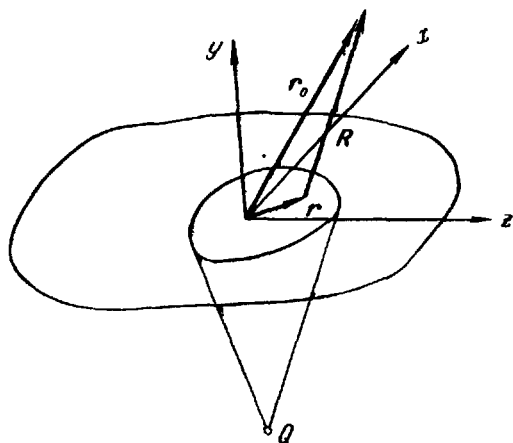


Рис. 99.

Выбрав плоскость отверстия за участок плоскости $z = 0$, величину qr можно записать в виде

$$qr = q_1 x + q_2 y = k \frac{x_0}{r_0} x + k \frac{y_0}{r_0} y = kx \cos \alpha + ky \cos \beta. \quad (36,3)$$

Здесь $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ — направляющие косинусы вектора n_0 .

Если волновой вектор падающей волны нормален к плоскости отверстия, а угол отклонения мал, то нетрудно заметить, что

$$\cos \alpha \approx \sin \theta_1 \approx \theta_1,$$

$$\cos \beta \approx \sin \theta_2 \approx \theta_2,$$

где θ_1 и θ_2 — углы отклонения (дифракция) в плоскостях (xz) и (yz) . При этом

$$q_1 \approx k\theta_1, \quad q_2 \approx k\theta_2. \quad (36,4)$$

Интегрирование в (36,2) ведется по площади отверстия. Если ввести функцию

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \text{ в пределах отверстия,} \\ 0 & \text{при } (x, y) \text{ за пределами отверстия,} \end{cases}$$

то можно переписать (36,2) в виде

$$f = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x, y) e^{-i(q_1 x + q_2 y)} dx dy, \quad (36,5)$$

где интегрирование ведется уже по всей площади экрана (включая и отверстие).

Для определения постоянной A заметим, что (36,5) представляет интеграл Фурье от функции $\xi(x, y)$. Поэтому

$$\xi(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2 A} \int \int e^{i(q_1 x + q_2 y)} f(q_1, q_2) dq_1 dq_2.$$

Из формулы (II, 9) следует

$$\int \int |\xi(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int \int |f(q_1, q_2)|^2 dq_1 dq_2.$$

По определению ξ интеграл слева равен единице, умноженной на площадь отверстия S . Интеграл $\int \int |f(q_1, q_2)|^2 dq_1 dq_2$ по определению представляет полную интенсивность за экраном. Последняя равна, очевидно, полной интенсивности света, проходящего через отверстие в экране, т. е.

$$\int \int |f|^2 dq_1 dq_2 = I_0 S,$$

где I_0 — интенсивность падающего света, отнесенная к 1 см^2 .

Отсюда находим значение A :

$$A = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \quad (36,6)$$

и окончательно имеем

$$f(q_1, q_2) = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(q_1 x + q_2 y)} \xi(x, y) dx dy. \quad (36,7)$$

Формула (36,7) дает общее решение поставленной задачи — распределение волнового поля за экраном с отверстием (на большом расстоянии от него).

Распределение интенсивности дается величиной

$$dI = |f(q_1, q_2)|^2 dq_1 dq_2. \quad (36,8)$$

По смыслу величин q_1 и q_2 ясно, что $|f|^2 dq_1 dq_2$ представляет интенсивность дифрагировавшего света при данном значении

углов дифракции θ_1 и θ_2 :

$$dI = |f(q_1, q_2)|^2 k^2 d\Omega. \quad (36,8')$$

До сих пор мы рассматривали дифракцию от малого отверстия в экране. Теперь предположим, что свет падает на малый экран, размер и форма которого совпадает с отверстием в рассмотренном ранее экране. Такой экран называется дополнительным по отношению к отверстию. Дифракцию у краев дополнительного экрана легко найти из следующих соображений.

Совместим дополнительный экран с отверстием. Тогда позади нового экрана, ставшего сплошным, световое поле будет отсутствовать.

Последний факт можно выразить словами: в результате наложения полей, дифрагировавших от отверстия и дополнительного к нему экрана, полное поле обратилось в нуль. Отсюда следует, что поле позади дополнительного экрана можно связать с полем за отверстием соотношением

$$f_{\text{доп}} = -f,$$

или

$$|f_{\text{доп}}|^2 dq_1 dq_2 = |f|^2 dq_1 dq_2. \quad (36,9)$$

Отверстие и дополнительный к нему экран дают тождественное распределение интенсивности дифрагировавшего света. Это положение носит название принципа Бабине.

Применим полученное общее выражение для распределения интенсивности к трем конкретным случаям, имеющим важное практическое значение.

Первым из них является дифракция на бесконечно длинной щели в непрозрачном экране.

Пусть ширина щели равна a , начало координат поместим в середину щели, направив ось y параллельно ее краям. Направление падающего света совпадает с направлением оси z . Очевидно, что дифракция происходит только от обоих краев щели, т. е. в интеграле (36,7) следует интегрировать только по координате x . В направлении y при бесконечной длине щели загибания лучей, падающих на экран, не происходит.

Поэтому мы будем все величины относить к единице длины щели. В одномерном случае вычисление, аналогичное проведенному, даст для A значение $A = \sqrt{\frac{I_0}{2\pi}}$. Формула (36,7) в одномерном случае имеет вид

$$f = \sqrt{\frac{I_0}{2\pi}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iqx} dx = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{\sin\left(q \frac{a}{2}\right)}{q} = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{\sin \frac{ka\theta}{2}}{k\theta}. \quad (36,10)$$

Интенсивность света, дифрагировавшего под углом между θ и $\theta + d\theta$, равна

$$dI = I_0 \frac{2 \sin^2 \frac{k a \theta}{2}}{\pi (k \theta)^2} d\theta = \frac{I_0 k a^2}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{k a \theta}{2}}{\left(\frac{k \theta a}{2}\right)^2} d\theta. \quad (36,11)$$

Величина $I_0 a$ представляет полную интенсивность света, падающего на единицу длины щели.

В результате дифракции возникает система освещенных и темных полос, параллельных щели.

Распределение интенсивности, как функция $x = \frac{k a \theta}{2}$, изображено на рис. 100.

В направлении $\theta = 0$ имеется главный максимум интенсивности; по обе стороны от него интенсивность быстро уменьшается с ростом θ . В точках

$\frac{k a \theta}{2} =$

$= \frac{n+1}{2} \pi (n = 1, 2, \dots)$ интенсив-

ность имеет ряд побочных максимумов. В этих максимумах интенсивность значительно ниже, чем в главном максимуме, и убывает с ростом порядка максимума (числа n).

Аналогичным образом можно найти дифракцию от круглого отверстия в экране радиуса a .

Поместим начало координат в центр круга. Тогда

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr} r dr d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} r dr d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

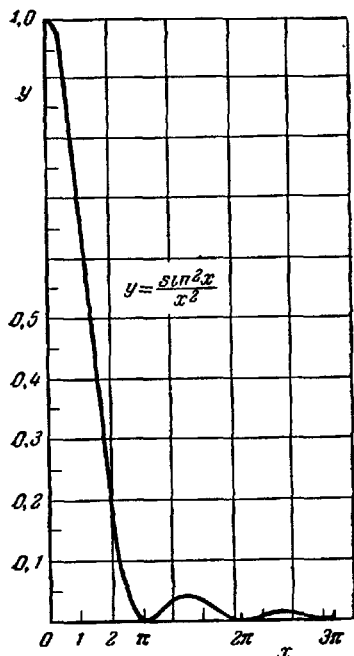


Рис. 100.

Из теории бesselевых функций известно, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(qr),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка¹⁾. Поэтому

$$f = \sqrt{I_0} \int_0^a J_0(qr) r dr.$$

В теории бесселевых функций доказывается, что

$$\int_0^a J_0(qr) r dr = \frac{a}{q} J_1(qa).$$

Поэтому окончательно

$$f = \sqrt{I_0} \frac{a}{q} J_1(aq). \quad (36,12)$$

Интенсивность излучения, испытавшего дифракцию в телесный угол $d\Omega$, равна

$$dJ = |f|^2 k^2 d\Omega = I_0 a^2 \frac{J_1^2(ka\theta)}{\theta^2} d\Omega = (I_0 a^2 \pi) \frac{J_1^2(ka\theta)}{\pi \theta^2} d\Omega, \quad (36,13)$$

где $I_0 \pi a^2$ — полная интенсивность излучения, падающего на отверстие.

В результате дифракции на круглом отверстии возникает система концентрических окружностей.

Угловое распределение дифрагировавшего излучения, даваемое функцией $\frac{J_1^2(ka\theta)}{\pi \theta^2}$, весьма сходно с распределением, изображенным на рис. 100. Высота главного максимума относительно выше, но расстояния между побочными максимумами близки к изображенным на рис. 100.

Напомним, что идентичные формулы дают распределение интенсивности при рассеянии от дополнительного экрана. При этом естественно, максимумам интенсивности при дифракции от отверстия отвечают максимумы при дифракции от непрозрачного экрана.

В заключение остановимся на дифракции при прохождении света через последовательность N тонких бесконечно длинных щелей, расположенных на равных расстояниях друг от друга (дифракционная решетка).

Пусть расстояние между серединами соседних щелей равно d , решетка ориентирована по оси x . Координаты середины щелей $x_n = nd$, где n — целые числа, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

¹⁾ Проще всего эта формула может быть получена разложением экспоненты в ряд и почленным интегрированием. См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1958, гл. VII.

Тогда (36,7) дает

$$f = \sqrt{\frac{I_0}{2\pi}} \sum_{n=0}^n e^{-iqx_n} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iqx} dx = f_1 \sum_{n=0}^N e^{-iqnd} = f_1 \frac{1 - e^{-iN dq}}{1 - e^{-i dq}},$$

где f_1 определено формулой (36,10).

Интенсивность излучения, дифрагировавшего от системы щелей, дается формулой

$$dI = |f|^2 dq \sim I_0 \left(\frac{\sin \frac{Nqd}{2}}{\sin \frac{qd}{2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{qa}{2}}{q \frac{a}{2}} \right)^2 dq. \quad (36,14)$$

Возникающая интерференционная картина отвечает наложению дифракций от разных щелей, но не простому их суммированию.

Важную роль в современной физике играет явление рассеяния рентгеновых лучей, а также электронов, нейтронов и т. д. от кристаллов (см. ч. V).

Ниже мы обсудим простейшую теорию дифракционного рассеяния рентгеновых лучей от кристаллов.

Пусть кристаллическая решетка образована совокупностью атомов одного сорта (т. е. идентичных по своим свойствам). Будем считать, что поглощение в решетке отсутствует.

Предположим, что на решетку падает пучок рентгеновых лучей, распространяющихся в направлении n_1 . Координату точки кристалла, в которой находится m -й атом решетки, можно записать в виде

$$r_m = la + nb + pc, \quad (36,15)$$

где l, n, p — целые (положительные и отрицательные) числа, а векторы a, b, c — единичные векторы решетки (подробнее см. § 109 ч. V; мы ограничимся случаем так называемой примитивной решетки).

В точку r_m приходит волна с амплитудой

$$f = f_0 e^{-i \left(\omega t - \frac{\omega r_m n_1}{c} \right)},$$

где f — произвольная компонента векторов поля и f_0 — постоянная. Атом, находящийся в точке r_m , рассеивает волну, и в точку наблюдения N , находящуюся на расстоянии R_m от m -го атома, приходит волна с амплитудой

$$f_N = \frac{f_0}{R_m} e^{-i \left(\omega t - \frac{\omega r_m n_1}{c} - \frac{\omega R_m}{c} \right)}.$$

Полагая

$$R_m \approx r_0 - nr_m,$$

где r_0 — расстояние от точки N до начала координат, находим для амплитуды волны, рассеянной m -м атомом:

$$f_N = \frac{f_0}{r_0} e^{-i\omega t} e^{ikr_0} e^{-ik(r_m \cdot n - n_1)}.$$

Если пренебречь вторичным воздействием волны, рассеянной m -м атомом, на остальные атомы решетки, то полную интенсивность в точке наблюдения можно написать в виде

$$I \sim I_0 \left| \sum e^{-ik(r_m \cdot n - n_1)} \right|^2, \quad (36,16)$$

где суммирование ведется по всем атомам кристалла (числа l, n, p).

Учитывая выражение (36,15), можно написать

$$\begin{aligned} k(r_m, n - n_1) &= kl(a, n - n_1) + kn(b, n - n_1) + kp(c, n - n_1) = \\ &= l(a, k - k_1) + n(b, k - k_1) + p(c, k - k_1). \end{aligned}$$

Тогда каждая из сумм вычисляется непосредственно. Например,

$$\sum_{l=0}^{N_1} e^{-il(a, k - k_1)} = \frac{1 - e^{-iN_1(a, k - k_1)}}{1 - e^{-i(a, k - k_1)}},$$

где N_1 — число узлов вдоль первого ребра кристалла. Отсюда сразу следует, что

$$I \sim I_0 \frac{\sin^2 \frac{N_1(a, k - k_1)}{2}}{\sin^2 \frac{(a, k - k_1)}{2}} \frac{\sin^2 \frac{N_2(b, k - k_1)}{2}}{\sin^2 \frac{(b, k - k_1)}{2}} \frac{\sin^2 \frac{N_3(c, k - k_1)}{2}}{\sin^2 \frac{(c, k - k_1)}{2}}. \quad (36,17)$$

Формула (36,17) носит название формулы Лауэ. Она является обобщением формулы дифракционной решетки на случай трех измерений с различными периодами.

Главный максимум лежит в направлении, определяемом совокупностью равенств, именуемых условиями Брэгга:

$$\left. \begin{aligned} (a, n - n_1) &= \frac{2\pi}{k} h_1 = h_1 \lambda, \\ (b, n - n_1) &= \frac{2\pi}{k} h_2 = h_2 \lambda, \\ (c, n - n_1) &= \frac{2\pi}{k} h_3 = h_3 \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (36,18)$$

где h_1, h_2, h_3 — целые числа.

Каждое из этих выражений является условием обращения в нуль соответствующего множителя в знаменателе формулы (36,17).

Следует подчеркнуть, что при данной длине волны λ и заданном направлении падающего пучка n_1 совокупность трех уравнений (36,18) служит для определения двух независимых

компонент единичного вектора n . При этом система (36,18) имеет решение только для определенной длины волны. Говорят, что отражение рентгеновых лучей от кристалла имеет селективный (избирательный) характер. В этом — отличие между одно- и двухмерной дифракционными решетками и кристаллом.

На практике, когда известна та длина волны, которая может селективно отражаться решеткой, кристалл освещают либо сплошным спектром рентгеновых лучей, либо изменяют ориентацию рассеивающего кристалла (направление n_1). В обоих случаях кристалл сам «отбирает» условия, — длину волны или ориентацию, при которых возможно избирательное отражение — одновременное выполнение равенств (36,18).

§ 37. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела сред

До сих пор мы изучали распространение электромагнитных волн в однородной среде. Рассмотрим теперь электромагнитную волну, падающую на поверхность раздела двух диэлектрических сред, отличающихся друг от друга величинами диэлектрических проницаемостей. Для простоты выкладок мы будем считать магнитные проницаемости обеих сред равными единице.

Поверхность раздела мы будем считать плоской. Ясно, что вблизи границы раздела физические свойства сред могут отличаться от свойств в объеме, так что у поверхности раздела образуется тонкий переходный слой. Однако, если толщина последнего мала по сравнению с длиной волны, его влиянием можно пренебречь и считать границу математической поверхностью раздела, не имеющей никакой толщины.

Предположим, что на эту поверхность, которую мы выберем за плоскость $z = 0$, падает плоская монохроматическая волна. Для простоты выкладок будем считать, что вектор k , характеризующий направление распространения падающей волны, лежит в плоскости (xz) . Среду, в которой распространяется падающая волна, мы будем кратко именовать первой средой.

Запишем векторы электрического и магнитного полей падающей волны в первой среде в виде

$$\begin{aligned} E^{\text{пад}} &= A e^{i(\omega t - kr)} = A e^{i(\omega t - kx \cos \alpha - kz \cos \gamma)}, \\ H^{\text{пад}} &= C e^{i(\omega t - kr)} = C e^{i(\omega t - kx \cos \alpha - kz \cos \gamma)}, \end{aligned}$$

где $\cos \alpha$ и $\cos \gamma$ — направляющие косинусы волнового вектора. Поскольку волна лежит в плоскости (xz) , $\cos \beta = 0$. Волновое число k связано с частотой соотношением

$$k = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_1}}{c}.$$