компонент единичного вектора n. При этом система (36,18) имеет решение только для определенной длины волны. Говорят, что отражение рентгеновых лучей от кристалла имеет селективный (избирательный) характер. В этом — отличие между одно- и двухмерной дифракционными решетками и кристаллом.

На практике, когда известна та длина волны, которая может селективно отражаться решеткой, кристалл освещают либо сплошным спектром рентгеновых лучей, либо изменяют ориентацию рассеивающего кристалла (направление n_1). В обоих случаях кристалл сам «отбирает» условия, — длину волны или ориентацию, при которых возможно избирательное отражение — одновременное выполнение равенств (36,18).

§ 37. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела сред

До сих пор мы изучали распространение электромагнитных волн в однородной среде. Рассмотрим теперь электромагнитную волну, падающую на поверхность раздела двух диэлектрических сред, отличающихся друг от друга величинами диэлектрических проницаемостей. Для простоты выкладок мы будем считать магнитные проницаемости обеих сред равными единице.

Поверхность раздела мы будем считать плоской. Ясно, что вблизи границы раздела физические свойства сред могут отличаться от свойств в объеме, так что у поверхности раздела образуется тонкий переходный слой. Однако, если толщина последнего мала по сравнению с длиной волны, его влиянием можно пренебречь и считать границу математической поверхностью раздела, не имеющей никакой толщины.

Предположим, что на эту поверхность, которую мы выберем за плоскость $z = 0$, падает плоская монохроматическая волна. Для простоты выкладок будем считать, что вектор $\boldsymbol{k}$, характеризующий направление распространения падающей волны, лежит в плоскости (xz). Среду, в которой распространяется падающая волна, мы будем кратко именовать первой средой.

Запишем векторы электрического и магнитного полей падающей волны в первой среде в виде

$$E^{\text{пад}} = Ae^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} = Ae^{i(\omega t - kx\cos\alpha - kz\cos\gamma)},$$
$$H^{\text{пад}} = Ce^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} = Ce^{i(\omega t - kx\cos\alpha - kz\cos\gamma)},$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы волнового вектора. Поскольку волна лежит в плоскости (xz), $\cos\beta = 0$. Волновое число k связано с частотой соотношением

$$k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}.$$

На границе раздела векторы $E^{\text{пад}}$ и $H^{\text{пад}}$ должны удовлетворять граничным условиям (5,2) и (5,4). Величины E и H не являются независимыми, но перпендикулярны друг другу, а их абсолютные значения связаны между собой соотношением (31,31) Поэтому одновременно удовлетворить двум независимым граничным условиям можно только, допустив, что падающая волна частично проходит во вторую среду, а частично отражается от поверхности раздела. Волну, проходящую во вторую среду, мы будем называть преломленной, поскольку направление ее распространения не совпадает, вообще говоря, с направлением падающей волны.

Пусть

$$E^{\text{отр}} = A^{\text{отр}} e^{i\left(\omega^{\text{отр}} t - k^{\text{отр}} r\right)},$$

$$E^{\text{пр}} = A^{\text{пр}} e^{i\left(\omega^{\text{пр}} t - k^{\text{пр}} r\right)}$$

означают электрические векторы отраженной и проходящей волн. Полное поле в первой среде характеризуется вектором

$$E_1 = E + E^{\text{отр}} = Ae^{i(\omega t - kr)} + A^{\text{отр}} e^{i\left(\omega^{\text{отр}} t - k^{\text{отр}} r\right)}.$$

Граничное условие (5,2) на поверхности раздела двух сред дает:

$$A_{\text{tg}}^{\text{пад}} \cdot e^{i(\omega t - kx\cos\alpha)} + A_{\text{tg}}^{\text{отр}} e^{i\left(\omega^{\text{отр}} t - k^{\text{отр}} x\cos\alpha^{\text{отр}} - k^{\text{отр}} y\cos\beta^{\text{отр}}\right)} =$$

$$= A_{\text{tg}}^{\text{пр}} \cdot e^{i\left(\omega^{\text{пр}} t - k^{\text{пр}} x\cos\alpha^{\text{пр}} - k^{\text{пр}} y\cos\beta^{\text{пр}}\right)}$$

Последнее равенство должно иметь место при произвольных значениях времени t и координат x и y. Это возможно только, если

$$\omega = \omega^{\text{отр}} = \omega^{\text{пр}}, \tag{37,1}$$

$$k\cos\alpha = k^{\text{отр}}\cos\alpha^{\text{отр}} = k^{\text{пр}}\cos\alpha^{\text{пр}},$$

$$\cos\beta^{\text{отр}} = \cos\beta^{\text{пр}} = 0.$$

Первое условие означает, что отражение и преломление происходит без изменения частоты. Третье равенство показывает, что отраженная и преломленная волны лежат в той же плоскости, что и падающая волна. Наконец, учитывая, что $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\,\omega}{c}$, можно переписать второе соотношение в виде

$$\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}\cos\alpha = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}\cos\alpha^{\text{отр}},$$

$$\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}\cos\alpha = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\cos\alpha^{\text{пр}},$$

откуда находим

$$\alpha = \alpha^{\text{отр}}, \tag{37,2}$$

т. е. угол падения равен углу отражения, и

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha^{\text{пр}}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}. \tag{37,3}$$

Вместо направляющих косинусов $\cos\alpha$ и $\cos\alpha^{\text{пр}}$ обычно вводят $\sin\theta$ и $\sin\theta^{\text{пр}}$, где θ и $\theta^{\text{пр}}$ — углы, образуемые падающей и преломленной волнами с нормалью к плоскости $z=0$ и именуемые углами падения θ и преломления $\theta^{\text{пр}}$. Для последних находим

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta^{\text{пр}}}=n_{12}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{37,4}$$

Здесь через n_{12} обозначен показатель преломления границы второй среды относительно первой.

Мы приходим к законам отражения и преломления света. При этом, однако, значение показателя преломления оказывается связанным с диэлектрическими проницаемостями сред. В частности, если первая среда является вакуумом и $\varepsilon_1=1$, то

$$n=\sqrt{\varepsilon_2}$$

называется показателем преломления данной среды.

Полученное выражение для показателя преломления оправдывает терминологию, введенную нами в § 31.

При рассмотрении явлений отражения и преломления электромагнитных волн, которые были в значительной мере изучены для света еще до установления его электромагнитной природы, принята оптическая терминология Среда с большим показателем преломления называется оптически более плотной, чем среда с меньшим показателем преломления.

Установив направления распространения отраженной и проходящей волн, перейдем к расчету их амплитуд. Учитывая равенства (37,1) из граничного условия (5,2) для амплитуд отраженной и преломленной волны, получаем

$$A_{\text{tg}}+A_{\text{tg}}^{\text{отр}}=A_{\text{tg}}^{\text{пр}}.$$

Для нахождения двух величин — $A^{\text{отр}}$ и $A^{\text{пр}}$, необходимо второе уравнение, которым служит граничное условие для магнитного поля. Мы ограничимся случаем нормального падения в плоскости (xz), который не требует громоздких выкладок. При нормальном падении имеем

$$E_x=Ae^{i(\omega t-kz)},\quad E_y=E_z=0;$$
$$H_y=-\sqrt{\varepsilon_1}\,Ae^{i(\omega t-kz)},$$
$$H_x=H_z=0.$$

Для отраженной волны имеем аналогично

$$E_x^{\text{отр}} = A^{\text{отр}} e^{i(\omega t + kz)}, \qquad E_y = E_k = 0,$$

$$H_y^{\text{отр}} = \sqrt{\varepsilon_1}\, A^{\text{отр}} e^{i(\omega t + kz)}, \quad H_z = H_y = 0,$$

$H_y^{\text{отр}}$ отличается от H_y знаком, поскольку отраженная волна распространяется в противоположном направлении и проекция $H_y^{\text{отр}}$ ориентирована в положительном направлении оси y. Для проходящей волны

$$E_x^{\text{пр}} = A^{\text{пр}} e^{i(\omega t - k^{\text{пр}} z)}, \qquad E_y = E_z = 0,$$

$$H_y^{\text{пр}} = -\sqrt{\varepsilon_2}\, A^{\text{пр}} e^{i(\omega t - k^{\text{пр}} z)}, \quad H_z = H_y = 0.$$

Условия непрерывности тангенциальных слагающих векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ при $z = 0$ запишутся в виде

$$A + A^{\text{отр}} = A^{\text{пр}},$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,(A - A^{\text{отр}}) = \sqrt{\varepsilon_2}\, A^{\text{пр}}.$$

Выражая величины $A^{\text{отр}}$ и $A^{\text{пр}}$ через A, находим

$$A^{\text{отр}} = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{1 + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}\, A = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\, A, \tag{37,5}$$

$$A^{\text{пр}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}\, A = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\, A. \tag{37,6}$$

Формулы (37,5) и (37,6) представляют частный случай (для нормального падения) известных формул Френеля, выведенных им в 1820 г. из общих представлений о свете, как о волновом процессе.

Зная амплитуды отраженной и преломленной волн, можно найти средние (за период) значения потока энергии, отраженного от границы раздела и проходящего во вторую среду. Они даются величинами:

$$|\sigma^{\text{отр}}| = \frac{c}{4\pi}\,[\overline{\boldsymbol{E}^{\text{отр}}\boldsymbol{H}^{\text{отр}}}] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 A^2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 |\sigma|,$$

$$|\sigma^{\text{пр}}| = \frac{c}{4\pi}\,[\overline{\boldsymbol{E}^{\text{пр}}\boldsymbol{H}^{\text{пр}}}] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_2}\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 A^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 |\sigma|,$$

где σ — вектор Пойнтинга падающей волны.

Отношение

$$R = \frac{|\sigma^{\text{отр}}|}{|\sigma|} = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 = \left(\frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}}\right)^2 \qquad (37,7)$$

называется коэффициентом отражения, а отношение

$$D = \frac{|\sigma^{\text{пр}}|}{|\sigma|} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_1}}\right)^2 = 1 - R \qquad (37,8)$$

коэффициентом прохождения.

Формула (37,7) показывает, что при $\varepsilon_2 \approx \varepsilon_1$ эффект отражения волны от границы раздела мал. Напротив, при $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ или $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$, т. е. при $n_{12} \substack{\gg \\ \ll} 1$, $R \approx 1$ и волна практически полностью отражается. Значительное отражение волны от диэлектрика с большой диэлектрической проницаемостью связано с тем, что в таком диэлектрике падающей волной возбуждается большой ток смещения. Благодаря этому возникает экранирование внешнего электрического поля, и его напряженность оказывается близкой к нулю. В пределе, при $\varepsilon_2 \to \infty$, на поверхности раздела вектор электрического поля имеет узел, вектор магнитного поля — пучность. Однако при любом конечном значении ε_2 коэффициент прохождения D при нормальном падении имеет хотя бы и малую, но конечную величину.

В случае падения электромагнитной волны под косым углом к плоскости раздела сред выражения для амплитуд (формулы Френеля) несколько усложняются. Однако общая картина не изменяется, за исключением случая $n_{12} < 1$, который требует специального рассмотрения.

Если на поверхность оптически менее плотной среды падает плоская волна под углом θ, то при достаточно малом значении n_{12} равенство (37,4) может иметь место только при мнимом значении угла $\theta^{\text{пр}}$. Предельное значение угла падения θ, при котором $\theta^{\text{пр}}$ может иметь еще вещественное значение, определяется условием

$$\frac{\sin\theta_0}{n_{12}} = 1. \qquad (37,9)$$

Угол θ_0 называется углом полного внутреннего отражения. При этом $\theta^{\text{пр}} = \frac{\pi}{2}$, т. е. преломленный луч скользит вдоль плоскости раздела сред.

При $\theta > \theta_0$ угол $\theta^{\text{пр}}$, а следовательно, величина $\sin\theta^{\text{пр}}$ оказываются мнимыми. В показателе экспоненты проходящей волны возникает слагаемое

$$i\left(k^{\text{пр}}\cos\theta^{\text{пр}}\right)z = i\left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\sqrt{1-\sin^2\theta^{\text{пр}}}\right)z = -\left\{\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2}-1}\right\}z.$$

Это означает, что имеет место затухание волн в оптически менее плотной среде, происходящее по экспоненциальному закону

$$|E^{\text{пр}}| \sim e^{-\left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2}-1}\right)z}. \tag{37,10}$$

Эффективная глубина проникновения электромагнитного поля в оптически менее плотную среду порядка δ, где

$$\delta \sim \frac{\lambdabar}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2}-1}}, \tag{37,11}$$

где $\lambdabar = \left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\right)^{-1}$ длина волны, деленная на 2π.

Поскольку в рассматриваемом идеальном диэлектрике не существует поглощения, ослабление поля в оптически менее плотной среде может быть связано только с высвечиванием электромагнитных волн обратно, в первую среду. Непосредственное вычисление подтверждает этот вывод. Коэффициент отражения R при $\theta > \theta_0$ оказывается равным единице. Описанный эффект получил название явления полного внутреннего отражения.

Мы не можем в рамках этой книги остановиться на вопросе о возникновении поляризации при определенных условиях отражения неполяризованной волны[1]).

В заключение кратко рассмотрим отражение электромагнитных волн от поверхности проводников. Электромагнитная волна, падающая на поверхность проводника, индуцирует в нем значительный ток проводимости. Свободные заряды в поле волны интенсивно ее рассеивают. В глубине проводника поле быстро затухает. Поэтому естественно ожидать, что поверхность проводника должна обладать значительными отражающими свойствами. Однако часть энергии электромагнитного поля будет диссипироваться в проводнике так, что коэффициент отражения должен иметь значение несколько меньшее единицы. Если формально в формуле для R заменить показатель преломления его

[1]) См., например, Д. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.

значением, даваемым формулой (33,16), то без труда найдем, учитывая, что $\varepsilon_1 = 1$ и $\sqrt{\varepsilon_2} = \sqrt{\varepsilon_{мет}} = (n - i\varkappa)$; $n \approx \varkappa \gg 1$:

$$R = \left|\frac{1-n+i\varkappa}{1+n-i\varkappa}\right|^2 = \frac{1-2n+n^2+\varkappa^2}{1+2n+n^2+\varkappa^2} \approx$$

$$\approx \frac{1-2n+2n^2}{1+2n+2n^2} \approx 1 - \frac{2}{n} = 1 - 2\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}. \qquad (37,12)$$

Эта формула Гегена и Рубенса хорошо согласуется с опытными данными для отражений электромагнитных волн, лежащих в диапазоне радиочастот и частот инфракрасной части спектра, от поверхности металлических проводников. При более высоких частотах соотношения классической макроскопической электродинамики оказываются неприменимыми.

Высокое значение коэффициента отражения в оптической области обусловливает характерный металлический блеск. В предельном случае проводника с бесконечно большой проводимостью коэффициент отражения $R = 1$. Это означает, что электромагнитное поле высокой частоты вовсе не проникает в глубь проводника с бесконечной проводимостью. Проводник с бесконечно большой проводимостью мы будем называть идеальным проводником. Идеальный проводник в области высокочастотных полей является аналогом проводника в электростатике.

Напишем граничные условия для векторов поля на поверхности идеального проводника. Поскольку внутри идеального проводника отсутствует электрическое и магнитное поле, из (5,2)—(5,6) следует

$$\left.\begin{array}{ll} E_{tg} = 0, & H_n = 0, \\ H_{tg} = \dfrac{4\pi}{c} i_S, & E_n = \dfrac{4\pi\omega_S}{\varepsilon} \end{array}\right\} \text{на поверхности идеального проводника,} \qquad (37,13)$$

где векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ относятся к полю в вакууме, i_S и ω_S — плотности поверхностного тока и заряда соответственно. Таким образом, на границе раздела диэлектрик — идеальный проводник вектор электрического поля направлен нормально, а вектор магнитного поля — параллельно поверхности. Хотя в природе не существует идеальных проводников, приближение идеального проводника часто достаточно полно передает характер поведения электромагнитного поля у поверхности тел с хорошей проводимостью.

§ 38. Волноводы

Важную роль в современной радиотехнике играет передача электромагнитной энергии на сравнительно небольшие расстояния. Она осуществляется путем возбуждения электромагнитного