значением, даваемым формулой (33,16), то без труда найдем, учитывая, что $\varepsilon_1 = 1$ и $\sqrt{\varepsilon_2} = \sqrt{\varepsilon_{\text{мет}}} = (n - i\varkappa)$; $n \approx \varkappa \gg 1$:

$$R = \left| \frac{1 - n + i\varkappa}{1 + n - i\varkappa} \right|^2 = \frac{1 - 2n + n^2 + \varkappa^2}{1 + 2n + n^2 + \varkappa^2} \approx$$
$$\approx \frac{1 - 2n + 2n^2}{1 + 2n + 2n^2} \approx 1 - \frac{2}{n} = 1 - 2\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}. \qquad (37{,}12)$$

Эта формула Гегена и Рубенса хорошо согласуется с опытными данными для отражений электромагнитных волн, лежащих в диапазоне радиочастот и частот инфракрасной части спектра, от поверхности металлических проводников. При более высоких частотах соотношения классической макроскопической электродинамики оказываются неприменимыми.

Высокое значение коэффициента отражения в оптической области обусловливает характерный металлический блеск. В предельном случае проводника с бесконечно большой проводимостью коэффициент отражения $R = 1$. Это означает, что электромагнитное поле высокой частоты вовсе не проникает в глубь проводника с бесконечной проводимостью. Проводник с бесконечно большой проводимостью мы будем называть идеальным проводником. Идеальный проводник в области высокочастотных полей является аналогом проводника в электростатике.

Напишем граничные условия для векторов поля на поверхности идеального проводника. Поскольку внутри идеального проводника отсутствует электрическое и магнитное поле, из (5,2)—(5,6) следует

$$\left.\begin{aligned} &E_{\text{tg}} = 0, \quad H_n = 0, \\ &H_{\text{tg}} = \frac{4\pi}{c} i_S, \quad E_n = \frac{4\pi\omega_S}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \text{на поверхности идеального проводника,} \qquad (37{,}13)$$

где векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ относятся к полю в вакууме, i_S и ω_S — плотности поверхностного тока и заряда соответственно. Таким образом, на границе раздела диэлектрик — идеальный проводник вектор электрического поля направлен нормально, а вектор магнитного поля — параллельно поверхности. Хотя в природе не существует идеальных проводников, приближение идеального проводника часто достаточно полно передает характер поведения электромагнитного поля у поверхности тел с хорошей проводимостью.

§ 38. Волноводы

Важную роль в современной радиотехнике играет передача электромагнитной энергии на сравнительно небольшие расстояния. Она осуществляется путем возбуждения электромагнитного поля в трубах с металлическими стенками различной формы и сечения, именуемых волноводами. Мы не можем в рамках этой книги останавливаться на методах возбуждения полей и ограничимся лишь изучением процесса распространения электромагнитных волн в волноводах.

Как будет ясно из дальнейшего, распространение электромагнитных волн в волноводах существенно отличается от распространения неограниченных в пространстве плоских электромагнитных волн. Поэтому вопрос о распространении волн в волноводах имеет не только практический, но и принципиальный интерес.

Чтобы не усложнять выкладок, мы ограничимся рассмотрением волновода прямоугольного сечения со стенками из идеального проводника. Пусть стороны прямоугольника равны a и b, причем для определенности будем считать, что $a > b$. Предположим, что в волновод (в плоскости $z = 0$) поступает монохроматическая плоская электромагнитная волна. Естественно допустить, что векторы поля внутри волновода зависят от времени и координаты вдоль волновода по закону

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H} \sim e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{38,1}$$

Подставляя (38,1) в волновые уравнения, находим

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)\boldsymbol{E}, \tag{38,2}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)\boldsymbol{H}. \tag{38,3}$$

Здесь и ниже $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ являются неизвестными функциями координат x и y, поскольку их зависимость от z и t уже учтена. Связь между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ определяется уравнениями для $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$. Подставляя (38,1) в эти уравнения, находим

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -\frac{i\mu\omega}{c} H_x, \tag{38,4}$$

$$-ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{i\mu\omega}{c} H_y, \tag{38,5}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{i\mu\omega}{c} H_z, \tag{38,6}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = \frac{i\varepsilon\omega}{c} E_x, \tag{38,7}$$

$$-ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{i\varepsilon\omega}{c} E_y, \tag{38,8}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{i\varepsilon\omega}{c} E_z. \tag{38,9}$$

Формулы (38,4)—(38,9) позволяют выразить компоненты векторов E_x, E_y, H_x и H_y через E_z и H_z. Простое вычисление дает

$$E_x = \frac{1}{c^2k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2}\left(ic^2k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega\mu c \frac{\partial H_z}{\partial y}\right), \tag{38,10}$$

$$E_y = \frac{1}{-\omega^2\varepsilon\mu + c^2k_k^2}\left(ic^2k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\omega\mu c \frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \tag{38,11}$$

$$H_x = \frac{1}{-\varepsilon\mu\omega^2 + c^2k_z^2}\left(-i\varepsilon\omega c \frac{\partial E_z}{\partial y} + ic^2k_z \frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \tag{38,12}$$

$$H_y = \frac{1}{c^2k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2}\left(i\varepsilon\omega c \frac{\partial E_z}{\partial x} + ic^2k_z \frac{\partial H_z}{\partial y}\right). \tag{38,13}$$

На поверхности волновода должны выполняться граничные условия для идеального проводника (см. § 37).

Будем сперва пытаться найти решение уравнений (38,2)—(38,3) в виде поперечных плоских волн, т. е. положим

$$E_z = H_z = 0.$$

Тогда из формул (38,10)—(38,13) ясно, что компоненты поля равны нулю, если только $c^2k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2 \neq 0$. Если, напротив $c^2k_z^2 = \varepsilon\mu\omega^2$, как это имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченной среде, распространяющейся со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, то (38,2) дает

$$\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. магнитное поле удовлетворяет двухмерному уравнению Лапласа, а на всей замкнутой границе области (на сторонах прямоугольник $x = 0, a$; $y = 0, b$) магнитное поле в силу (37,13) направлено по касательной к границе. В математике показывается[1], что единственным решением такой краевой задачи служит $H = 0$. Если магиитное поле в волне отсутствует, то, очевидно, равно нулю и электрическое поле.

Мы видим, таким образом, что поперечные электромагнитные волны не могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Следует подчеркнуть, что этот вывод не связан с формой волновода, но относится к любым волноводам, выполненным в виде простой трубы любого сечения. Именно, он означает, что в трубе с идеально проводящими стенками не могут распространяться поперечные

[1] См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.

волны. В том случае, когда границы области незамкнуты, например в случае щели между двумя бесконечными идеально проводящими плоскостями, или в случае многосвязного пространства, например в волноводе, образованном двумя концентрическими цилиндрами, наш вывод более не применим. В таких системах возможно, в принципе, распространение поперечных электромагнитных волн.

Смысл этого результата очень прост. В поперечной волне в волноводе линии магнитного поля должны быть направлены по касательной к стенкам и иметь характер замкнутых кривых. При этом линии поля не входят в идеальный проводник и не охватывают трубки тока проводимости. Продольная компонента тока смещения отсутствует, так что подобные линии магнитного поля не охватывают также и трубок тока смещения. Однако из общих соображений ясно, что линии магнитного поля, которые не охватывали бы никаких трубок с током, существовать не могут.

Это наглядное рассуждение позволяет также понять, почему в незамкнутом волноводе, выполненном в виде концентрических труб, возможно существование поперечных волн. В неограниченном пространстве линии магнитного поля могут быть незамкнутыми и уходить на бесконечность. В многосвязном волноводе они могут охватывать трубки с током, текущим по поверхности внутреннего цилиндра. В обоих случаях возможно существование магнитного и электрического полей, бегущих вдоль волновода в виде поперечных волн.

Оказывается, однако, что отсутствие в волноводе поперечных волн не означает еще невозможности распространения в нем электромагнитного поля.

Как будет сейчас показано, в волноводе возможно образование продольных волн, которые не могут существовать в неограниченном пространстве.

Под продольными волнами мы понимаем такие волны, которые имеют отличную от нуля компоненту поля в направлении распространения волны.

Из формул (38,10)—(38,13) ясно, что следует рассмотреть две независимые возможности:

$$1)\quad E_z \neq 0, \quad H_z = 0,$$
$$2)\quad H_z \neq 0, \quad E_z = 0.$$

В первом случае магнитное поле в волне имеет две компоненты — H_x и H_y и является чисто поперечным. Такие волны называют обычно волнами — TM (от англ. transverse magnetic) или поперечно-магнитного типа. Электрическое поле имеет продольную и две поперечных компоненты.

Во втором случае электрическое поле волны имеет поперечный характер и волна называется соответственно — *TE* (от англ. transverse electric) или поперечно-электрического типа.

В случае волн *TM*-типа на основании (38,2) имеем

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}=\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)E_z \tag{38,14}$$

и

$$E_z=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ a; \quad y=0,\ b, \tag{38,15}$$

в силу (37,13). Ниже мы покажем, что достаточно удовлетворить только этим граничным условиям. Чтобы удовлетворить уравнению (38,14) и граничным условиям (38,15), для E_z нужно написать

$$E_z=A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\,e^{i(\omega t-k_z z)}, \tag{38,16}$$

где

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{\omega^2}{v^2} \tag{38,17}$$

и, кроме того,

$$k_x=\frac{\pi m}{a}; \qquad k_y=\frac{\pi n}{b}, \tag{38,18}$$

а m и n — целые числа, не равные нулю.

Найденное решение имеет вид волн, бегущих в положительном направлении оси z и стоячих в плоскостях $z=\mathrm{const}$.

Поперечно-магнитную волну, отвечающую числам m и n, обозначают обычно TM_{mn}. Если величина E_z известна, то из (38,10)—(38,13) легко найти остальные компоненты поля. Мы не будем выписывать соответствующих формул, а ограничимся лишь указанием на следующее обстоятельство: нетрудно сообразить, что граничные условия для всех компонент электрического и магнитного полей выполнены автоматически. Например, на грани $y=0$ нормальная слагающая магнитного поля

$$H_n=H_y\sim\frac{\partial E_z}{\partial x}\sim\sin\frac{\pi n}{b}y\Big|_{y=0}=0;$$

аналогично

$$E_{\mathrm{tg}}=E_x=E_z=0.$$

Поэтому, как мы указывали уже ранее, достаточно удовлетворить граничным условиям (38,15). Таким образом, у стенок волновода линии магнитного поля тангенциальны к поверхности. Они образуют замкнутые кривые, охватывающие продольные линии электрического поля.

Обсудим несколько подробнее формулу (38,17). Перепишем ее в виде

$$k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\pi^2 m^2}{a^2}-\frac{\pi^2 n^2}{b^2}}. \tag{38,19}$$

При заданном значении m и n величина k_z имеет вещественное значение только при

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\omega^2}{4\pi^2v^2}\geqslant\frac{(\omega_{\text{крит}}^{m,n})^2}{4\pi^2v^2}=\left(\frac{\pi^2m^2}{a^2}+\frac{\pi^2n^2}{b^2}\right)\frac{1}{4\pi^2}=\frac{1}{\lambda_{\text{крит}}^2},\tag{38,20}$$

где $\omega_{\text{крит}}^{m,n}$ — некоторая критическая частота и $\lambda_{\text{крит}}$ — соответствующая ей длина волны.

Если k_z оказывается мнимым, что отвечает $\omega<\omega_{\text{крит}}$, то вместо волны, бегущей вдоль оси z, мы приходим к экспоненциально затухающему выражению для E_z и соответственно остальных компонент поля. Таким образом, через волновод могут проходить только волны с $\omega>\omega_{\text{крит}}^{m,n}$ или $\lambda<\lambda_{\text{крит}}$.

Наибольшее значение длины проходящей волны $\lambda_{\text{крит}}^{\text{макс}}$ получается для волны TM_{11} ($m=1$ и $n=1$), являющейся волной TM-типа наинизшего порядка. Именно при этом

$$\lambda_{TM_{11}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Фазовая скорость TM_{mn}-волны равна, очевидно,

$$v_{\text{фаз}}=\frac{\omega}{k_z}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\lambda^2\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2b}\right)^2\right]}}=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{крит}}^2}}}=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{крит}}^2}}}.\tag{38,21}$$

Поскольку всегда $\lambda<\lambda_{\text{крит}}$, фазовая скорость волн в волноводе всегда больше фазовой скорости света в среде — v и при $\lambda\to\lambda_{\text{крит}}$ неограниченно возрастает. В частности, если внутрь волновода не введен диэлектрик (т. е. $\varepsilon=\mu=1$), $v_{\text{фаз}}$ всегда больше скорости света в пустоте c.

Групповая скорость может быть легко найдена из формулы (38,17):

$$v_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{dk_z}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{крит}}^2}}.\tag{38,22}$$

Групповая скорость всегда меньше скорости $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ и стремится к нулю при приближении λ к $\lambda_{\text{крит}}$.

Из (38,21) и (38,22) ясно, что $v_{\text{фаз}}$ и $v_{\text{гр}}$ удовлетворяют общему соотношению: $v_{\text{фаз}}\cdot v_{\text{гр}}=v^2$.

Рассмотрим теперь волны поперечно-электрического (TE)-типа. Для таких волн имеем

$$\frac{\partial^2H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H_z}{\partial y^2}=\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)H_z.\tag{38,23}$$

Граничные условия для тангенциальной слагающей электрического поля с помощью (38,10) и (38,11) можно выразить через производные от H_z. Тогда вместо

$$E_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ b$$

имеем условие

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ b. \tag{38,24}$$

Аналогично вместо

$$E_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ a$$

имеем

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ a. \tag{38,25}$$

Решение уравнения (38,23) при граничных условиях (38,24) и (38,25) можно написать в виде волны TE-типа:

$$H_z = B \cos(k_x x) \cos(k_y y)\, e^{i(\omega t - k_z z)}, \tag{38,26}$$

где

$$k_x = \frac{\pi m}{a}; \qquad k_y = \frac{\pi n}{b}.$$

Здесь m и n — целые числа; в отличие от волн TM-типа каждое из этих чисел (но не оба одновременно) может принимать значение нуль. Формулы (38,19)—(38,22) остаются в силе для волн TE-типа. В них, однако, одно из чисел m и n можно полагать равными нулю. TE-типа волной наинизшего порядка является волна TE_{10}. Для волны TE_{10} критическая длина волны будет

$$\lambda_{\text{крит}}^{\text{макс}} = 2a.$$

Важнейшим общим выводом, который может быть сделан из изложенной теории, является то, что поперечный характер плоских волн тесно связан с неограниченными размерами среды, в которой происходит их распространение. При распространении волн в ограниченной области чисто поперечные волны могут существовать лишь в особых условиях (многосвязная область). В обычных условиях волны имеют продольную слагающую электрического или магнитного полей. Напомним, что и в неограниченном пространстве, но вблизи излучателя, электромагнитная волна имеет отличную от нуля продольную (радиальную) компоненту полей E_r и H_r (ср. §§ 25, 26 ч. I).

В приведенном выше расчете волновода простейшей формы мы не учитывали эффектов, играющих на практике важную роль. Сюда относятся прежде всего потери мощности, связанные с неидеальным характером стенок волновода и заполняющего его диэлектрика. Мы также не рассматривали и теорию волноводов более сложной формы, а также волноводов, неоднородных по длине.

Наконец, мы не касались многочисленных проблем, связанных с разнообразными применениями волноводов, в том числе к линейным ускорителям заряженных частиц. Со всеми этими вопросами мы отсылаем читателя к обширной специальной литературе[1]).

§ 39. Прохождение быстрых частиц через вещество

Вопрос о потерях энергии и излучении быстрых частиц, движущихся в веществе, имеет большое значение в различных областях современной физики.

Как мы увидим ниже, существует несколько различных механизмов потери энергии частиц, движущихся в веществе.

Прежде всего следует напомнить, что, как мы видели в § 43 ч. I и § 26 ч. II, частицы, испытывающие соударения с атомами и отклоняющиеся полем ядер, испускают тормозное излучение. Тормозное излучение ультрарелятивистских частиц, согласно (26,15) ч. II, обратно пропорционально массе частицы и играет основную роль для легких частиц (электронов). При прохождении через вещество тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов) большую роль играют обычно другие источники потерь энергии. Заряженная частица, движущаяся в веществе, взаимодействует с атомами вещества и поляризует их. Иными словами, движущаяся частица создает некоторое поле в веществе. Это поле, с одной стороны, само действует на частицу и тормозит ее. Потеря энергии частицы, связанная с этим торможением, равна, очевидно, работе тормозящей силы. Этот вид потери энергии называется поляризационным, поскольку тормозящее поле является полем поляризации, создаваемым движущейся частицей. С другой стороны, среда, поляризованная частицей, может излучать поперечные электромагнитные волны. Для этого необходимо, чтобы поляризация, вызываемая в среде пролетающей частицей, не успевала следовать за частицей. При этом пролетевшая частица оставляет среду в поляризованном состоянии и среда излучает избыток энергии в виде поперечных электромагнитных волн. Этот источник потерь энергии называется излучением Черенкова — Вавилова или, кратко, черенковским излучением.

Подчеркнем еще раз, что излучение Черенкова — Вавилова не связано с какими-либо ускорениями, поскольку это — излучение среды, а не движущегося заряда. С другой стороны, как

[1]) См., например, Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Сов. радио, 1957; С. Рамо и Д. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, 1948.