более сложной формы, а также волноводов, неоднородных по длине.

Наконец, мы не касались многочисленных проблем, связанных с разнообразными применениями волноводов, в том числе к линейным ускорителям заряженных частиц. Со всеми этими вопросами мы отсылаем читателя к обширной специальной литературе[1]).

§ 39. Прохождение быстрых частиц через вещество

Вопрос о потерях энергии и излучении быстрых частиц, движущихся в веществе, имеет большое значение в различных областях современной физики.

Как мы увидим ниже, существует несколько различных механизмов потери энергии частиц, движущихся в веществе.

Прежде всего следует напомнить, что, как мы видели в § 43 ч. I и § 26 ч. II, частицы, испытывающие соударения с атомами и отклоняющиеся полем ядер, испускают тормозное излучение. Тормозное излучение ультрарелятивистских частиц, согласно (26,15) ч. II, обратно пропорционально массе частицы и играет основную роль для легких частиц (электронов). При прохождении через вещество тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов) большую роль играют обычно другие источники потерь энергии. Заряженная частица, движущаяся в веществе, взаимодействует с атомами вещества и поляризует их. Иными словами, движущаяся частица создает некоторое поле в веществе. Это поле, с одной стороны, само действует на частицу и тормозит ее. Потеря энергии частицы, связанная с этим торможением, равна, очевидно, работе тормозящей силы. Этот вид потери энергии называется поляризационным, поскольку тормозящее поле является полем поляризации, создаваемым движущейся частицей. С другой стороны, среда, поляризованная частицей, может излучать поперечные электромагнитные волны. Для этого необходимо, чтобы поляризация, вызываемая в среде пролетающей частицей, не успевала следовать за частицей. При этом пролетевшая частица оставляет среду в поляризованном состоянии и среда излучает избыток энергии в виде поперечных электромагнитных волн. Этот источник потерь энергии называется излучением Черенкова — Вавилова или, кратко, черенковским излучением.

Подчеркнем еще раз, что излучение Черенкова — Вавилова не связано с какими-либо ускорениями, поскольку это — излучение среды, а не движущегося заряда. С другой стороны, как

[1]) См., например, Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Сов. радио, 1957; С. Рамо и Д. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, 1948.

будет показано в дальнейшем, черенковское излучение возможно не всегда, а только при движении частицы со скоростью v, большей скорости распространения поля в среде c/n. Это ограничение выражает упомянутое условие отставания поля поляризации от пролетающей частицы. Мы перейдем к одновременному вычислению поляризационных и черенковских потерь одной частицы в макроскопически однородной и изотропной среде. Нашей целью является нахождение поля, создаваемого в среде одиночным зарядом, движущимся со скоростью $\boldsymbol{v}$.

Мы будем пренебрегать уменьшением скорости в процессе движения и считать ее постоянной по величине и направлению. Среду мы будем считать прозрачной, так что мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon^0 \to 0$. Магнитную проницаемость μ примем равной единице.

Плотность тока в среде, отвечающую равномерному движению одной частицы, можно записать в виде

$$\boldsymbol{j} = e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t). \tag{39,1}$$

Поэтому уравнения Максвелла будут иметь вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{39,2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi e\boldsymbol{v}}{c}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t). \tag{39,3}$$

Ниже мы обсудим, при каких условиях среду можно считать сплошной, пренебрегать ее атомной структурой и описывать макроскопическими величинами.

Будем пытаться искать решение уравнения Максвелла путем разложения в интеграл Фурье. Написав для векторов поля формулы (33,1)—(33,4), а для вектора $\boldsymbol{j}$ выражение

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{39,4}$$

мы переписываем систему уравнений (39,2), (39,3) в виде

$$i[\boldsymbol{kE}(\boldsymbol{k}, \omega)] = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{39,5}$$

$$i[\boldsymbol{kB}(\boldsymbol{k}, \omega)] = -i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega) + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{39,6}$$

Умножая (39,5) векторно на $\boldsymbol{k}$, исключая затем из (39,6) $[\boldsymbol{kB}]$ и пользуясь уравнением связи (33,4), приходим к уравнению

$$\left\{k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right\}E_j = i\frac{4\pi\omega}{c^2}j_i, \tag{39,7}$$

которое отличается от (33,15) только наличием правой части. Величина j_i в (39,7) означает фурье-компоненту плотности тока

$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)$. В изотропной среде для ε_{ij} подставляем ее значение по формуле (33,9). Тогда находим

$$\{k^2\delta_{ij} - k_ik_j\} E_j - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\left\{\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right\} E_j - \frac{\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}\frac{k_ik_j}{k^2} E_j = i\frac{4\pi\omega}{c^2} j_i,$$

или, в векторном виде,

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kE})}{k^2}\right) - \frac{\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kE})}{k^2} = i\frac{4\pi\omega}{c^2}\boldsymbol{j}. \tag{39,8}$$

Умножая (39,8) скалярно на вектор $\boldsymbol{k}$, получаем

$$\boldsymbol{kE} = -i\frac{4\pi}{\omega\varepsilon_\parallel}(\boldsymbol{kj}). \tag{39,9}$$

Подставляя (39,9) в (39,8), находим

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)\boldsymbol{E} = -i\frac{4\pi\omega}{k^2}\left\{\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)\frac{(\boldsymbol{kj})\boldsymbol{k}}{\omega^2\varepsilon_\parallel} + \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kj})}{c^2} - \frac{k^2\boldsymbol{j}}{c^2}\right\},$$

откуда

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{4\pi\omega i}{k^2}\left\{\frac{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega))\boldsymbol{k}}{\omega^2\varepsilon_\parallel} + \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)) - k^2\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)}{c^2\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)}\right\}. \tag{39,10}$$

Переходя от компоненты Фурье к электрическому полю, имеем

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}d\boldsymbol{k}\,d\omega = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t). \tag{39,11}$$

Первое слагаемое $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t)$ имеет вид

$$\boldsymbol{E}_1 = -i\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int\frac{d\boldsymbol{k}\,d\omega}{k^2}\cdot\frac{(\boldsymbol{kj})\boldsymbol{k}}{\omega\varepsilon_\parallel}e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}. \tag{39,12}$$

Подставим теперь значение $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)$, воспользовавшись формулой (III, 8). Имеем, очевидно,

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega) = 2\pi e\boldsymbol{v}\delta(\omega - \boldsymbol{kv}). \tag{39,13}$$

Тогда E_1 приобретает вид

$$E_1 = -i\frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{k}\,d\omega}{k^2}\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kv})}{\omega\varepsilon_\parallel}e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}\delta(\omega - \boldsymbol{kv}) =$$

$$= -i\frac{e}{2\pi^2}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{k^2}\frac{\boldsymbol{k}}{\varepsilon_\parallel(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{kv})}e^{i(\boldsymbol{kr} - \boldsymbol{kv}t)}, \tag{39,14}$$

где $\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})$ — значение $\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \omega)$ при $\omega = \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}$. Поле $\boldsymbol{E}_1$, создаваемое пролетающей заряженной частицей в среде, оказывает на нее обратное влияние. На частицу действует сила

$$\boldsymbol{F} = e(\boldsymbol{E}_1)_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t},$$

где индекс показывает, что значение поля в каждый момент времени нужно брать в точке $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}t$, в которой находится частица. Интересующая нас потеря энергии частицы (мы будем относить ее к единице пути в вещества) равна работе этой силы на единице пути. Поскольку магнитная часть лоренцевой силы $\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$ не производит работы, работа силы $\boldsymbol{F}$ на единице пути равна

$$\begin{aligned}\frac{dW_1}{dr} &= e\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}, \boldsymbol{E}_1\right)_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t} = -\Delta E_1 = \\ &= \mathrm{Re}\left\{-\frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int \frac{d\boldsymbol{k}}{k^2} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}t)}\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}\right\}_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t} = \\ &= \mathrm{Re}\left\{-\frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int\int \frac{d\boldsymbol{k}\, d\omega}{k^2}\frac{\omega\delta(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}{\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \omega)}\right\}. \qquad (39,15)\end{aligned}$$

Значок Re поставлен для того, чтобы напомнить о вещественности выражения для работы $\frac{dW_1}{dr}$. Эта работа имеет ясный физический смысл. Она представляется значением $\varepsilon_{\parallel}$ и представляет работу над частицей, производимую созданной ею продольной поляризацией. Таким образом, $\frac{dW_1}{dr}$ есть мера потери энергии частицы ΔE_1 на пути 1 *см*. Эта энергия идет на образование продольной поляризации. Несколько ниже, при вычислении (39,15), мы обсудим еще вопрос о том, какие процессы фактически происходят в среде, когда пролетающая частица создает в ней продольную поляризацию.

Обратимся теперь ко второму слагаемому в (39,11). Согласно формулам (39,13) и (39,10) имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t) &= i\frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\, d\omega e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}\delta(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\cdot\frac{\omega}{k^2}\frac{k^2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}{c^2\left(k^2-\frac{\omega^2\varepsilon_{\perp}}{c^2}\right)} = \\ &= \frac{ie}{2\pi^2 c^2}\int d\boldsymbol{k} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}t)}\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{k^2}\cdot\frac{k^2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}{k^2-\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}. \qquad (39,16)\end{aligned}$$

Соответственно, работа поля $\boldsymbol{E}_2$, совершаемая над частицей, и потеря энергии частицы ΔE_2, отнесенные к единице пути, равны

$$\frac{dW_2}{dr} = -\Delta E_2 = \operatorname{Re}\left\{\frac{ie^2}{2\pi^2 v c^2}\int e^{i(\boldsymbol{kr}-\boldsymbol{kv}t)}\, d\boldsymbol{k}\frac{(\boldsymbol{kv})\left(v^2-\frac{(\boldsymbol{kv})^2}{k^2}\right)}{k^2-\frac{(\boldsymbol{kv})^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{kv})}\right\}_{r=vt} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{ie^2}{2\pi^2 v c^2}\int d\boldsymbol{k}\, d\omega\, \frac{\omega\left(v^2-\frac{\omega^2}{k^2}\right)}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\,\omega)}\,\delta(\omega-\boldsymbol{kv})\right\}. \qquad (39,17)$$

Потеря энергии ΔE_2 определяет черенковские потери частицы. Они связаны с возбуждением в среде поперечного электромагнитного поля, т. е. с излучением поляризуемой среды.

Учет пространственной дисперсии позволил нам очень четко разделить оба типа потерь: поляризационные и черенковские. В дальнейшем мы ограничимся расчетом потерь в среде без пространственной дисперсии [1]), для чего, согласно (33,11), в полученных формулах следует положить

$$\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k},\ \omega) = \varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\ \omega) = \varepsilon(\omega)\,|_{\omega=\boldsymbol{kv}}. \qquad (39,18)$$

Перейдем к вычислению интегралов в формулах (39,15) и (39,17). Имеем, с учетом (39,18),

$$\Delta \boldsymbol{E}_1 = \operatorname{Re}\left\{\frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int d\boldsymbol{k}\cdot\frac{\omega}{k^2\varepsilon(\omega)}\right\}. \qquad (39,19)$$

Мы указывали уже выше, что все наше рассмотрение будет относиться к прозрачным средам, точнее, к средам с исчезающе малым поглощением. Это значит, что в выражении для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^r(\omega) + i\varepsilon^i(\omega)$ следует перейти к пределу $\varepsilon^i(\omega) \to 0$. Это позволяет существенно упростить все дальнейшие выкладки. Именно, мы можем написать

$$\operatorname{Re}\frac{i}{\varepsilon(\omega)} = \operatorname{Re}\frac{i}{\varepsilon^r(\omega)+i\varepsilon^i(\omega)} = \operatorname{Re}\frac{i(\varepsilon^r - i\varepsilon^i)}{(\varepsilon^r)^2+(\varepsilon^i)^2} = \frac{\varepsilon^i}{(\varepsilon^r)^2+(\varepsilon^i)^2}.$$

Переходя к пределу $\varepsilon^i \to +0$, мы можем воспользоваться формулой (III, 4′) и написать

$$\lim_{\varepsilon^i\to+0}\operatorname{Re}\frac{i}{\varepsilon(\omega)} = \lim_{\varepsilon^i\to+0}\left[\frac{\varepsilon^i}{(\varepsilon^r)^2+(\varepsilon^i)^2}\right] = \pi\delta[\varepsilon(\omega)]. \qquad (39,20)$$

[1]) Потери с учетом пространственной дисперсии см., например, В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961; Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, сб. Вопросы физики плазмы, т. II, Москва, 1963.

При этом формула для поляризационных потерь приобретает вид

$$\Delta E_1 = \frac{e^2}{2\pi v}\int \frac{\omega}{k^2}\delta[\varepsilon(\omega)]\,d\boldsymbol{k} = \frac{e^2}{2\pi v}\int \frac{(\boldsymbol{kv})}{k^2}\delta[\varepsilon(\boldsymbol{kv})]\,d\boldsymbol{k}, \qquad (39,21)$$

где мы воспользовались тем, что вклад в потери дает только частота $\omega = \boldsymbol{kv}$. Если явный вид $\varepsilon(\omega)$ известен, то интеграл (39,21) может быть вычислен без труда. В § 46 такое вычисление будет проделано для случая плазмы.

Заметим, что в формулу (39,21) не входит масса частицы. Это вполне естественно, поскольку потери энергии связаны с поляризацией среды. Поляризационные потери поэтому являются основным источником энергетических потерь тяжелых частиц, движущихся в веществе в широком интервале энергий. Легкие частицы, например электроны сравнительно высоких энергий, теряют основную часть энергии на тормозное излучение.

Перейдем теперь к вычислению черенковских потерь. Это вычисление может быть проведено с использованием того же самого приема. Имеем

$$\Delta E_2 = -\frac{e^2}{2\pi^2 v c^2}\,\mathrm{Re}\left\{ i\int d\boldsymbol{k}\,\frac{\left(v^2 - \frac{(\boldsymbol{kv})^2}{k^2}\right)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{k^2 - \frac{(\boldsymbol{kv})^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega)}\right\}. \qquad (39,22)$$

Выберем направление движения частицы за ось z и введем новые переменные

$$\omega = \boldsymbol{kv} = k_z v,$$

$$q^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Тогда

$$d\boldsymbol{k} = dk_x\,dk_y\,dk_z = q\,dq\,d\varphi\,\frac{d\omega}{v}.$$

В новых переменных имеем

$$\Delta E_2 = -\frac{e^2}{2\pi^2 v^2 c^2}\,\mathrm{Re}\left\{ i\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,d\omega\int_0^{\infty}\frac{q\,dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{q^2v^2}{q^2+\omega^2\left[\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right]}\right\} =$$

$$= -\frac{e^2}{\pi c^2}\,\mathrm{Re}\left\{ i\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,d\omega\int_0^{\infty}\frac{q^3\,dq}{\left(q^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(q^2+\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right)}\right\}.$$

В непоглощающей среде аналогично (39,20) можно написать

$$\lim_{\varepsilon'\to+0}\mathrm{Re}\left\{\frac{i}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)}\right\} = -\pi\delta\left[q^2+\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right],$$

откуда

$$\Delta E_2 = \frac{e^2}{\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\, d\omega \int_0^{\infty} \frac{q^3\, dq}{q^2 + \frac{\omega^2}{v^2}} \delta \left[q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \right) \right].$$

Вводя новую переменную $u = q^2$, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{q^3\, dq}{q^2 + \frac{\omega^2}{v^2}} \delta \left[q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{u\, du}{u + \frac{\omega^2}{v^2}} \delta \left[u + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right), & v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}, \\ 0, & v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}. \end{cases}$$

Поэтому окончательно мы приходим к следующему выражению для потерь энергии на поперечное электромагнитное излучение Черенкова — Вавилова, отнесенных к единице пути в веществе:

$$\Delta E_2 = \frac{e^2}{2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \omega\, d\omega = \frac{e^2}{c^2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \omega\, d\omega, \qquad (39,23)$$

поскольку $\varepsilon(\omega)$ — четная функция своего аргумента (см. (32,11)).

Таким образом, мы можем указать следующие основные особенности излучения Черенкова — Вавилова:

1) оно возникает только для частиц, движущихся со скоростью, большей $v_{\text{пор}} = \frac{c}{n}$ (порог излучения);

2) оно зависит от заряда частиц, но не от их массы;

3) излучение целиком приходится на видимую и отчасти ультрафиолетовую области спектра. Для более коротких волн $n < 1$ (ср. § 34) и излучение более невозможно;

4) излучаемая на единицу пути энергия в единичном интервале частот имеет характерное спектральное распределение (39,10);

5) излучение, возникающее в данной точке траектории, распространяется по поверхности конуса с вершиной в точке и осью, совпадающей с направлением полета частицы. Угол раствора конуса θ определяется условием

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}. \qquad (39,24)$$

В заключение подчеркнем, что потери энергии на излучение Черенкова — Вавилова весьма невелики и составляют всего около 0,1 % потерь весьма быстрых частиц в веществе. Последние определяются тормозным излучением и рядом других явлений. Важность черенковского излучения заключается в том, что его использование положено в основу новых детекторов быстрых частиц. Эти детекторы, получившие наименование черенковских счетчиков, стали в настоящее время одним из главных рабочих инструментов в области физики частиц высоких энергий. Наблюдая излучение Черенкова, можно не только зарегистрировать прохождение частиц, но согласно (39,24) непосредственно определить величину и направление их скорости; согласно (39,23) определить их заряд; разделить между собой частицы с равным импульсом и разной массой (воспользовавшись существованием порога $v_{\text{пор}} = \frac{p_{\text{пор}}}{m}$) и т. д.

В заключение обсудим вопрос о границах применимости макроскопического рассмотрения. Фактически быстрые частицы взаимодействуют с отдельными атомами или, точнее, атомными электронами. Для макроскопического описания процесса пролета необходимо, чтобы за время пролета частицы мимо атома внутриатомные электроны не успели испытать заметное смещение. При этом пролетающая частица двигается в квазистационарном поле многих атомов.

Таким образом, скорость частицы должна быть велика по сравнению с характерной скоростью атомных электронов.

Интересным источником потерь энергии равномерно движущейся частицы на излучение является так называемое переходное излучение. Оно возникает при переходе частицы из одной среды в другую. Для упрощения формул будем считать, что частица, равномерно двигаясь в вакууме со скоростью $v \sim c$, падает на границу среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Границу среды мы считаем плоскостью $z = 0$, а падение частицы — нормальным к границе. Момент падения частицы на границу выберем за время $t=0$. Найдем вектор-потенциал поля частицы по формуле (32,10) ч. I.

Имеем, очевидно, для компоненты Фурье $\boldsymbol{A}_\omega$ на большом расстоянии от заряда

$$\boldsymbol{A}_\omega = \frac{e}{2\pi c r} \cdot e^{ikr} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{v}(t)\, e^{i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}(t) - \omega t]}\, dt =$$

$$= \frac{e\boldsymbol{v}}{2\pi c r} e^{ikr} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{it(kv\sqrt{\varepsilon} - \omega)}\, dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{it(kv - \omega)}\, dt \right\} =$$

$$= \frac{e\boldsymbol{v}}{2\pi c r} e^{ikr} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\omega t\left(\frac{v\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{c} - 1\right)}\, dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{i\omega t\left(\frac{v\cos\theta}{c} - 1\right)}\, dt \right\}.$$

Пользуясь определением δ_+- и δ_--функций (см. Приложение III), находим

$$A_\omega = \frac{ev}{2\pi c\omega r} \cdot \frac{1}{i} \left\{ \frac{\delta_-}{1 - \frac{v\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{c}} - \frac{\delta_+}{1 - \frac{v\cos\theta}{c}} \right\}. \quad (39,25)$$

Излучаемая интенсивность по формуле (32,14) ч. I равна

$$\Delta E = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{v\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{c}} - \frac{1}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \right]^2 \sin^2\theta \, d\Omega. \quad (39,26)$$

Смысл полученного результата весьма прост; при движении в среде роль относительной скорости $\frac{v}{c}$ играет величина $\frac{v\sqrt{\varepsilon}}{c}$, определяющая оптический путь в веществе. При переходе из одной среды в другую (или в вакуум) скорость остается постоянной, но скачком изменяется величина $\frac{v\sqrt{\varepsilon}}{c}$. Это изменение эквивалентно внезапному изменению скорости, т. е. ускорению частицы. Формулы (39,25) и (39,26) показывают, что излучение направлено главным образом вперед ($\theta \approx 0$) и содержит весьма высокие частоты (высокие гармоники). Мы не останавливаемся на вычислении полной интенсивности, которую можно вычислить, интегрируя по всем углам. Заметим лишь, что полная интенсивность оказывается при этом пропорциональной энергии частицы. Аналогичное вычисление при $v \ll c$ оказывается более сложным, поскольку при этом необходимо учитывать явления отражения и преломления излучаемых электромагнитных волн на границе раздела.