Основную долю межэлектродного пространства заполняет ионизованный газ, являющийся в среднем электронейтральным. Эта область разряда получила название плазмы. В плазме число положительных ионов в среднем равно числу электронов и отрицательных ионов в единице объема. Наряду с ионами и электронами в плазме может содержаться также большее или меньшее количество неионизованных атомов или молекул.

Свойства плазмы, которыми мы будем интересоваться в дальнейшем, не зависят от конкретных свойств разряда и его характера. Поведение плазмы играет важную роль в явлениях газового разряда, который находит широкое приложение в современной технике. Особый интерес к высокотемпературной плазме возник в последние годы в связи с работами по управляемым термоядерным реакциям, а также, в связи с рядом астрофизических проблем.

Как известно, для получения термоядерных реакций необходимо достигнуть таких высоких температур (выше 10^8 градусов), при которых энергия теплового движения ядерных частиц оказывается достаточной для преодоления энергетических барьеров, препятствующих проникновению ядер друг в друга. При таких температурах атомы являются нацело ионизованными и вещество представляет предельно ионизованную плазму. Требующиеся для протекания термоядерных реакций температуры имеются во внутренних областях звезд.

В лабораторных условиях до настоящего времени не удалось еще реализовать плазму необходимой температуры. Однако проводятся интенсивные исследования высокотемпературной плазмы, давшие уже ряд существенных результатов.

В астрофизических условиях вещество находится в состоянии плазмы не только во внутренних областях звезд, но также в звездных атмосферах и в облаках межзвездной материи.

§ 41. Равновесная плазма

Изучение свойств плазмы мы начнем, естественно, с рассмотрения теории равновесной плазмы.

Мы будем для простоты предполагать, что плазма содержит заряды только двух сортов: положительные ионы с зарядностью p_1 и электроны. Для общности получаемых соотношений мы будем последние также именовать ионами и приписывать им зарядность $p_2 = -1$. Тогда условие электронейтральности плазмы можно записать в виде

$$\bar{n}_1 p_1 + \bar{n}_2 p_2 = 0, \tag{41,1}$$

где $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ — средние числа соответственно ионов и электронов в единице объема.

При рассмотрении равновесных свойств плазмы мы ограничимся приближением идеального газа. В этом приближении кулоновское взаимодействие между заряженными частицами можно считать малым по сравнению с тепловой энергией:

$$\frac{p_1 p_2 e^2}{\bar{l}} \ll kT, \tag{41,2}$$

где $\bar{l}$ — среднее расстояние между ионами. Последнее связано с числом ионов в единице объема (концентрацией плазмы) N соотношением

$$\bar{l} \approx \frac{1}{N^{1/3}}, \tag{41,3}$$

так что условие идеальности газовой плазмы можно представить в виде

$$N \ll \frac{(kT)^3}{p_1^3 p_2^3 e^6}. \tag{41,4}$$

Концентрация плазмы N связана с числами $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ соотношением

$$N = \bar{n}_1 + \bar{n}_2. \tag{41,5}$$

Если неравенство (41,4) выполнено, то плазму в нулевом приближении можно рассматривать как обычный газ, характеризуемый температурой T.

Частицы плазмы будут обладать максвелловским распределением по скоростям и равномерным распределением в пространстве. Кулоновское взаимодействие между заряженными частицами приводит к появлению в объеме некоторого среднего электрического поля, характеризуемого потенциалом $\bar{\varphi}$. В нашем приближении изменение свойств газа, вызванное этим полем, можно считать малым.

Для нахождения величины $\bar{\varphi}$ можно применить следующие рассуждения. Мысленно выделим в плазме некоторый произвольный ион, находящийся в точке O, выбранной за начало координат, и найдем полный средний потенциал электрического поля $\bar{\varphi}$ в окрестности точки O. Потенциал $\bar{\varphi}$ создается всеми ионами (включая и ион, находящийся в точке O). Усреднение проводится по всему времени наблюдения, в течение которого ионы побывают во всевозможных положениях в плазме.

Рассмотрим некоторый элемент объема dV, находящийся на расстоянии r от начала координат O. Пусть потенциал электрического поля в этом объеме равен $\overline{\varphi(r)}$. Ввиду изотропии поля, потенциал $\bar{\varphi}$ зависит только от абсолютной величины r, но не от направления радиуса-вектора. При малой концентрации плазмы к ионам, находящимся в поле, можно применить закон распределения Больцмана, написав для числа частиц в объеме dV выражения:

$$n_1\,dV = Ae^{-\frac{p\,e\varphi}{kT}}\,dV, \tag{41,6}$$

$$n_2\,dV = Be^{-\frac{p_2e\varphi}{kT}}\,dV, \tag{41,7}$$

где n_1 и n_2 — числа положительных и отрицательных ионов в единице объема

Постоянные A и B могут быть найдены следующим образом. При как угодно высокой температуре $T\to\infty$ поле, создаваемое ионами в плазме, не может влиять на их пространственное распределение, так как их потенциальная энергия будет пренебрежимо малой. Поэтому при $T\to\infty$ оба распределения должны переходить в равномерное распределение частиц в пространстве, т. е.

$$n_1\,dV = \bar{n}_1\,dV, \tag{41,8}$$

$$n_2\,dV = \bar{n}_2\,dV, \tag{41,9}$$

где $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ — средние числа положительных и отрицательных ионов в 1 $см^3$.

Сравнивая (41,8) и (41,9) с (41,6) и (41,7), находим

$$n_1\,dV = \bar{n}_1e^{-\frac{p_1e\Phi}{kT}}\,dV, \tag{41,10}$$

$$n_2\,dV = \bar{n}_2e^{-\frac{p_2e\Phi}{kT}}\,dV. \tag{41,11}$$

Согласно формулам (41,10) и (41,11) в объеме вблизи точки O, в которой находится выделенный нами ион, имеется заряд

$$de = \left(\bar{n}_1p_1ee^{-\frac{p_1e\varphi}{kT}} + n_2p_2ee^{-\frac{p_2e\Phi}{kT}}\right)dV. \tag{41,12}$$

Этот заряд обусловлен тем, что вероятность нахождения в dV иона того же знака, что и ион в точке O, несколько понижена, а иона противоположного знака — несколько повышена по сравнению с той же вероятностью без учета межионного взаимодействия. В этом смысле говорят, что вокруг иона O возникает неравномерно заряженное ионное облако.

Само собой разумеется, что фактически никакого облака вокруг каждого из ионов не существует, так как выделение иона в точке O было сделано только для удобства рассуждений, и никаких выделенных ионов в плазме не существует. Имеется лишь некоторая вероятностная корреляция (соответствие) между расположением любой пары ионов в пространстве. То же самое можно выразить другими словами: можно сказать, что каждый ион создает вокруг себя ионное облако и вместе с тем входит в состав ионных облаков, создаваемых всеми другими ионами в плазме.

С помощью (41,12) можно получить среднюю плотность заряда в точке r:

$$\bar{\rho}(r) = \frac{de}{dV} = e\left(\bar{n}_1 p_1 e^{-\frac{p_1 e\Phi}{kT}} + \bar{n}_2 p_2 e^{-\frac{p_2 e\Phi}{kT}}\right). \qquad (41,13)$$

Заметим, что уравнение (41,13) является несамосогласованным. Его следовало бы записать в виде

$$\Delta\bar{\varphi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\overline{\left(\bar{n}_1 p_1 e^{-\frac{p_1 e\varphi}{kT}} + n_2 e^{-\frac{p_2 e\varphi}{kT}}\right)}.$$

Поскольку $\overline{e^{\varphi}} \neq e^{\Phi}$, переход к (41,13) может быть сделан только в предположении, что энергия межионного взаимодействия мала по сравнению с kT, экспоненциальные выражения $e^{-\frac{p_1 e\Phi}{kT}}$ и $e^{-\frac{p_2 e\Phi}{kT}}$ можно разложить в ряд, написав

$$\bar{\rho}(r) \approx -\frac{e^2\left(p_1^2\bar{n}_1 + p_2^2\bar{n}_2\right)}{kT}\bar{\varphi}(r). \qquad (41,14)$$

Средний потенциал поля $\bar{\varphi}$ в данной точке плазмы связан со средней плотностью заряда $\bar{\rho}$ в этой точке уравнением электростатики

$$\Delta\bar{\varphi} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (41,15)$$

Поэтому для $\bar{\varphi}$ мы находим уравнение

$$\Delta\bar{\varphi} = \varkappa^2\bar{\varphi}, \qquad (41,16)$$

где через $\varkappa^2$ обозначена существенно положительная величина

$$\varkappa^2 = \frac{2\pi e^2\left(p_1^2\bar{n}_1 + p_2^2\bar{n}_2\right)}{\varepsilon kT}. \qquad (41,17)$$

Уравнение (41,16) или уравнение (41,15), в котором $\bar{\rho}$ определено по (41,13), носит название уравнения Пуассона — Больцмана и является основой теории равновесной плазмы.

Решение уравнения (41,16), удовлетворяющее требованию изотропии пространства, может быть легко получено в полярных координатах. В полярных координатах, учитывая, что $\bar{\varphi}$ не зависит от полярных углов θ и ψ, уравнение (41,6) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\bar{\varphi}) = \varkappa^2\bar{\varphi}.$$

Вводя новую неизвестную функцию $f = r\bar{\varphi}$, получаем $\frac{d^2 f}{dr^2} = \varkappa^2 f$. Решение последнего уравнения имеет вид $f = C_1 e^{-\varkappa r} + C_2 e^{\varkappa r}$, откуда следует, что

$$\bar{\varphi} = C_1 \frac{e^{-\varkappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{\varkappa r}}{r}. \tag{41,18}$$

Постоянная $C_2 = 0$, так как экспоненциально возрастающее решение, приводящее к бесконечно большому потенциалу при $r \to \infty$, должно быть отброшено. Поэтому

$$\bar{\varphi} = C_1 \frac{e^{-\varkappa r}}{r}.$$

Постоянная C_1 может быть найдена из требования, чтобы вблизи условно выделенного заряда потенциал поля совпадал с кулоновским полем заряда. Отсюда следует, что

$$\varphi_{r \to 0} = \frac{C_1}{r} \to \frac{p_1 e}{\varepsilon r},$$

так что

$$C_1 = \frac{p_1 e}{\varepsilon},$$

и окончательно

$$\bar{\varphi} = \frac{p_1 e}{\varepsilon} \frac{e^{-\varkappa r}}{r}. \tag{41,19}$$

Формула (41,19) показывает, что потенциал поля вблизи иона убывает, в основном, по экспоненциальному закону. На расстоянии $r > \frac{1}{\varkappa}$ от иона потенциал оказывается малым. Величина $\frac{1}{\varkappa}$, характеризующая быстроту уменьшения потенциала, получила название дебаевского радиуса.

Для выяснения смысла полученного решения разложим потенциал на кулоновский потенциал выделенного иона и потенциал поля, создаваемого всеми остальными ионами $\bar{\varphi}'$:

$$\bar{\varphi} = \frac{p_1 e}{\varepsilon r} + \bar{\varphi}'. \tag{41,20}$$

Из (41,19) находим

$$\bar{\varphi}' = \frac{p_1 e}{\varepsilon} \frac{e^{-\varkappa r} - 1}{r}. \tag{41,21}$$

Найдем плотность заряда, отвечающую потенциалу $\bar{\varphi}'$. В силу (41,15) имеем

$$\bar{\rho}' = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \bar{\varphi}' = -\frac{p_1 e \varkappa^2}{4\pi} \frac{e^{-\varkappa r}}{r}.$$

Последняя формула показывает, что вблизи иона с зарядом $p_1 e$ образуется ионное облако, имеющее противоположный знак заряда. Плотность заряда в облаке экспоненциально убывает с расстоянием от центрального иона. Полный заряд облака равен

$$\int_0^\infty \bar{\rho}'\,dV = -p_1 e.$$

Смысл этого результата совершенно ясен: вокруг данного иона с большей вероятностью группируются ионы противоположного знака. Полный заряд облака ионов, окружающих любой заданный ион, в точности равен заряду данного иона. Наличие вокруг иона облака ионов противоположного знака приводит к ослаблению или, как говорят, экранированию поля иона. Поэтому потенциал экранированного поля вблизи иона убывает быстрее, чем кулоновский потенциал. Величина $1/\varkappa$ представляет средний радиус ионного облака заданного иона.

Вводя в условие применимости теории (41,4) величину дебаевского радиуса $\varkappa \sim e^2N/kT$, можно переписать его в виде $N\varkappa^{-3} \gg 1$, т. е. в виде требования: среднее число ионов, находящихся в объеме сферы с дебаевским радиусом, должно быть достаточно велико по сравнению с единицей.

Тот же результат гораздо убедительней может быть получен с помощью метода коррелятивных функций. Именно, воспользуемся малостью концентрации плазмы, чтобы замкнуть уравнение (42,12) для бинарной функции. Последнее содержит тернарную функцию. При малых концентрациях приближенно

$$\rho_{12}(v) = (1 + \psi_{12}(v)), \qquad (41{,}22)$$

где $\psi_{12} \ll 1$. Формула (41,22) означает, что взаимодействие частиц в плазме приводит к слабой корреляции. Если пренебречь вероятностью тройных соударений частиц в плазме, то тернарную функцию ρ_{12j} можно представить произведением

$$\rho_{12j} = \rho_{12} \cdot \rho_{2j} \cdot \rho_{1j} \simeq 1 + \psi_{12} + \psi_{2j} + \psi_{1j}. \qquad (41{,}23)$$

Подставляя это в (48,12) ч. III, находим

$$\frac{\partial \psi_{12}}{\partial r_1} = -\frac{1}{kT}\frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} - \frac{N}{VkT}\int \frac{\partial u_{1j}}{\partial r_1}(1 + \psi_{12} + \psi_{2j} + \psi_{1j})\,d\boldsymbol{r}_j. \qquad (41{,}24)$$

Напомним, что по индексу j производится суммирование по всем (в нашем случае — двум) сортам частиц.

Очевидно, что три интеграла в правой части обратятся в нуль

$$\int \frac{\partial u_{12}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)}{\partial r_1}\,d\boldsymbol{r}_j = 0,$$

$$\int \frac{\partial u_{1j}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_j|)}{\partial r_1}\,\psi_{2j}(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_j|)\,d\boldsymbol{r}_j = 0,$$

$$\int \frac{\partial u_{1j}}{\partial r}\,\psi_{12}\,d\boldsymbol{r}_j = 0.$$

Действительно, они содержат интегрирование по углам вектора $\frac{\partial u}{\partial r_1}$, где u — изотропная функция соответствующих переменных. Поэтому окончательно

$$\frac{\partial \psi_{12}}{\partial r_1} = -\frac{1}{kT}\frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} - \frac{N}{VkT}\int \frac{\partial u_{1j}}{\partial r_1}\psi_{2j}\,d\boldsymbol{r}_j. \qquad (41{,}25)$$

Возьмем дивергенцию от уравнения (41,25) по координатам $\boldsymbol{r}$ и учтем, что взаимодействие является кулоновским, так что

$$\operatorname{div}\frac{\partial u_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1} = \Delta u_{12}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) = -p_1 p_2 \cdot 4\pi e^2 \delta(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|).$$

Тогда находим

$$\Delta\psi_{12} = \frac{4\pi p_1 p_2 e^2}{kT}\delta(r) + \frac{4\pi e^2 p_1 N}{VkT}\sum p_j \psi_{2j}.$$

Полагая $\psi_{12} = p_1 p_2 \psi(r)$, $\psi_{2j} = p_2 p_j \psi(r)$, находим окончательно

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = \frac{4\pi e^2}{kT}\delta(r), \qquad (41{,}26)$$

что совпадает с уравнением для средней плотности или потенциала (41,16). Член с δ-функцией позволяет автоматически учесть граничное условие (41,19).

Нетрудно видеть, что корреляционная функция, удовлетворяющая (41,26), имеет вид

$$\psi_{12} = p_1 p_2\left(1 - \frac{e^2 e^{-\varkappa r}}{kTr}\right).$$

Найдем теперь термодинамические характеристики равновесной плазмы. Наличие кулоновского взаимодействия между ионами и электронами ответственно за дополнительную энергию, которую имеет плазма по сравнению с нейтральным газом при том же давлении. Эта энергия равна, очевидно, $E' = \frac{V}{2}\Sigma e n_i p_i \bar{\varphi}_i$, где n_i — среднее число частиц i-го сорта в единице объема, V — полный объем плазмы и $\bar{\varphi}_i$ — средний потенциал, создаваемый всеми ионами в месте нахождения i-го иона.

Среднее значение потенциала электрического поля при расстояниях $r < \varkappa$ (для таких расстояний выведенные выше формулы имеют количественный смысл) можно написать в виде

$$\bar{\varphi}_i = -e p_i \varkappa,$$

откуда

$$E' = -\frac{e^2 V\varkappa}{2}\Sigma n_i p_i^2 = -e^3\sqrt{\frac{\pi}{(kT)V}}(\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Полная энергия плазмы равна, следовательно,

$$E = \Sigma n_i V\, kT - e^3 \sqrt{\frac{\pi}{kTV}} (\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Пользуясь формулой Гиббса — Гельмгольца, находим свободную энергию плазмы

$$F = -T \int \frac{E}{T^2}\, dT = -\Sigma n_i V\, kT - \frac{2e^3}{3} \sqrt{\frac{\pi}{kTV}} (\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Давление плазмы равно

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \Sigma n_i kT - \frac{e^3}{3V^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{kT}} (\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Давление в плазме оказывается ниже, чем давление идеального газа той же плотности. Этот результат имеет простой смысл: притяжение между разноименными зарядами, которые располагаются ближе друг к другу, оказывается преобладающим над отталкиванием одноименных зарядов.

В заключение подчеркнем, что, хотя плазма является макроскопически однородной средой, в масштабе $r < 1/\varkappa$ она неоднородна. Это обстоятельство имеет весьма важное значение для электромагнитных процессов в плазме.

Явление экранировки имеет очень большое значение для поведения плазмы. Совершенно очевидно, что всякий заряд, введенный в плазму, экранируется на расстоянии $1/\varkappa$.

Пусть, например, плазма находится в сосуде, ограниченном твердой стенкой. Если на стенке имеется поверхностный заряд, то создаваемое им поле будет экранироваться и проникать в плазму лишь на глубину $1/\varkappa$. Расстояние $1/\varkappa$ является, таким образом, толщиной того защитного слоя, который образуется на границе равновесной плазмы и изолирует ее от внешних влияний.

До сих пор мы считали плазму полностью равновесной. Очень часто приходится, однако, изучать плазму, находящуюся в неполном равновесии[1]). Именно, поскольку масса тяжелых ионов весьма велика по сравнению с массой электронов, обмен энергиями между ними при упругих столкновениях происходит весьма медленно. Напротив, обмен энергией электронов или ионов между собой идет существенно быстрее.

Если в некоторый начальный момент плазма находилась в неравновесном состоянии, то по прошествии времени релаксации τ установится равновесное (максвелловское) распределение у электронов и у ионов порознь. Каждую совокупность частиц можно характеризовать своей температурой, T_e и T_i соответственно. Однако выравнивание температур и установление общей

[1]) Ср. § 79 ч. III. Более подробно о неполных равновесиях см., например, В. Г. Левич, Введение в статистическую физику, Гостехиздат, 1954.

температуры T плазмы, отвечающей равновесию между электронами и ионами, требует времени релаксации $\tau_T \gg \tau$.

Наличие неполного равновесия в плазме, характеризующейся при этом двумя температурами, не очень сильно отражается на описанном выше свойстве экранирования.

§ 42. Плазма в стационарном электромагнитном поле

Если поместить плазму в стационарное внешнее электрическое поле $\boldsymbol{E}$, то в ней возникнет электрический ток, который можно вычислить.

В отсутствие внешнего электрического поля имеет место максвелловское распределение скоростей у ионов и электронов в плазме. При наложении стационарного внешнего электрического поля $\boldsymbol{E}$ начнется преимущественное движение электронов и ионов в разных направлениях. В плазме возникает ток в направлении приложенного электрического поля, плотность которого равна

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{42,1}$$

До сих пор мы ограничивались макроскопическим описанием и не пытались выделить смысл электропроводности σ, считая ее макроскопической характеристикой среды. Здесь, однако, необходимо, на основе весьма грубой модели оценить значение σ.

Мы будем исходить из предположения, что ионы и электроны образуют идеальный газ. Средние скорости ионов и электронов, массы и длины свободного пробега обозначим соответственно v_i, m_i, λ_i. В отличие от нейтрального газа, при наличии внешнего электрического поля, в плазме ионы и электроны испытывают ускорение на длине свободного пробега между соударениями.

В ч. VI мы дадим достаточно полную теорию. Однако для наших целей достаточно грубой оценки. Средняя скорость, приобретаемая частицей под действием поля $\boldsymbol{E}$, равна по порядку величины $u \sim \frac{e_i}{m_i} E\tau_i$, где τ_i — среднее время полета между двумя последовательными соударениями $\tau_i \sim \lambda_i / v_i$.

Систематическое движение со скоростью u приводит к переносу заряда в направлении поля. Плотность тока может быть написана в виде

$$j = \sum n_i e_i u_i \sim \left(\sum \frac{n_i e_i^2 \tau_i}{m_i} \right) \boldsymbol{E}.$$

Таким образом, с точностью до числового множителя

$$\sigma \sim \sum \frac{n_i e_i^2 \tau_i}{m_i}. \tag{42,2}$$