постоянной по сечению[1]) (т. е. $j = j_0$ при $r < R$, $j = 0$ при $r > R$). Тогда (43,3) в цилиндрических координатах приобретает вид

$$\frac{dp}{d\rho} = -\frac{jH_\varphi}{c},$$

где магнитное поле H_φ выражается формулой (17,11).

Интегрирование дает

$$p = p_0 - \frac{\pi j^2 \rho^2}{c^2}, \qquad \rho < R, \tag{43,7}$$

$$p = 0, \qquad \rho > R. \tag{43,8}$$

Здесь $p_0 = nkT$ — давление и n_0 — плотность газа в центре плазменного цилиндра.

Формулы (43,7)—(43,8) показывают, что газовое давление и соответственно плотность газа в центре выше, чем на периферии цилиндра. Собственное магнитное поле сжимает и удерживает плазменный цилиндр. При этом радиус плазменного цилиндра имеет постоянное значение, а выделение джоулева тепла приводит к ее разогреву.

Явление самосжатия плазменного цилиндра, получившее название «пинч-эффекта», приводит к отрыву плазмы от стенок сосуда, в котором происходит газовый разряд, и к образованию более или менее тонкого плазменного шнура.

Примерами плазменного шнура может служить искра или молния.

Образование и сжатие плазменного шнура имеет, естественно, особенно большое значение при больших плотностях тока.

Мы ограничились здесь лишь нахождением распределения давления в предположении о стационарном характере поведения плазмы. В действительности для реализации пинч-эффекта важно нестационарное движение плазмы, приводящее к колебаниям плазменного цилиндра как целого, могущим приводить к потере устойчивости и разрыву.

Изучение полной картины нестационарных явлений, возникающих при пинч-эффекте, является весьма сложной задачей[1]).

§ 44. Магнитное поле в движущейся плазме

В ряде важных проблем существенную роль в поведении плазмы играют гидродинамические эффекты, связанные с макроскопическим движением плазмы. Для изучения подобного рода

---

[1]) По вопросам плазменного состояния вещества см. А. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957; Т. Коулинг, Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1958; X. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952; сб. статей «Управляемые термоядерные реакции», Атомиздат, 1960; Л. А. Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1961.

эффектов необходимо сформулировать систему уравнений для электромагнитного поля в движущейся среде.

На основании результатов § 23 можно написать

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\left[\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}\boldsymbol{B}\right]. \tag{44,1}$$

Кроме того, если поля во времени изменяются достаточно медленно и можно пренебречь током смещения, распределение магнитного поля определяется уравнениями (22,5). С помощью закона Ома представим (44,1) в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{B}] = -c \operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{B}]. \tag{44,2}$$

Исключая из (44,2) и (22,5) плотность тока, имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{B}].$$

Согласно (I, 50) и учитывая (22,5), находим окончательно

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta\boldsymbol{B} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{B}]. \tag{44,3}$$

Сравнивая (44,3) с (30,1), мы видим, что в отличие от неподвижной среды, в уравнении (44,3) содержится слагаемое $\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{B}]$. В отсутствие этого члена, уравнение (44,3) выражает затухание магнитного поля в проводящей среде на глубине скин-слоя.

Здесь нас в большей мере будет интересовать случай, когда первым слагаемым в правой части (44,3) можно пренебречь по сравнению со вторым. Для этого требуется, чтобы скорость движения плазмы v_0 и ее проводимости σ были достаточно велики[1]).

Этот случай сравнительно трудно (хотя и возможно) реализовать в лабораторных условиях. Однако при изучении явлений, происходящих в космических масштабах, реализуется именно он. Опуская в уравнении (44,3) малое слагаемое, можно переписать его в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{B}]. \tag{44,4}$$

Соотношение (44,4) имеет важный смысл. Именно, согласно (23,6), равенство (44,4) означает, что поток магнитной индукции через контур, каждая точка которого движется вместе с жидкостью, является постоянным во времени. Наглядно условие (44,4) можно представить себе с помощью линий напряженности магнитного поля. Равенство (44,4) означает, что линии

---

[1]) Более точная формулировка может быть найдена в цитированных выше монографиях Спитцера или Коулинга.

поля движутся вместе с веществом плазмы, будучи как бы «приклеены» или «вморожены» в вещество.

Рассмотрим некоторый замкнутый «жидкий контур», т. е. замкнутый контур, соединяющий частицы жидкости, каждая из которых движется по своей линии гидродинамического тока. Из (44,4) следует, что число линий магнитного поля, переходящих через жидкий контур, остается постоянным. Жидкие частицы как бы скользят по линиям напряженности, не пересекая их в поперечном направлении.

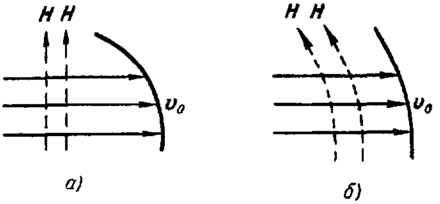

Рис. 101.

Рассмотрим теперь движение плазмы, перпендикулярное к магнитному полю. Особенности такого движения проще всего представить себе, рассмотрев простой случай. Пусть в начальный момент времени плазма покоилась, а затем была приведена в движение с профилем скорости, изображенным на рис. 101 стрелками. Линии напряженности магнитного поля в неподвижной плазме изображены на рис. 101, *а* пунктиром. Движение плазмы, «увлекающее» линии напряженности, придает им форму, представленную пунктирными линиями на рис. 101, *б*.

В неподвижной плазме магнитное поле имеет напряженность $H_x^{(0)}$. В движущейся плазме, помимо компоненты поля H_x, возникает компонента $H_y \neq 0$. Нетрудно показать, что при деформации линии магнитного поля его напряженность возрастает.

Пусть уравнение линии напряженности поля, деформированной движением, будет $y(x)$. Допустим, что искривление линии напряженности мало. Тогда можно написать

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x} \approx \frac{H_y}{H_x^{(0)}},$$

откуда

$$H_y = H_x^{(0)} \frac{dy}{dx}.$$

Найдем изменение энергии магнитного поля при такой деформации линий поля. Для придания большей наглядности получаемым формулам, отнесем эту энергию к одной линии магнитного поля. Для этого заметим, что через единичную площадку, перпендикулярную магнитному полю, по определению проходит H линий поля. Если

$$U = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 \, dx \, dS = \frac{\mu}{8\pi} \int (H_x^{(0)})^2 \, dx \, dS = \mu \frac{(H_x^{(0)})^2}{8\pi} S \int dx$$

— полная начальная энергия поля, то энергия, отнесенная к единичной площадке, есть $\frac{U}{S} = \frac{\mu}{8\pi}(H_x^{(0)})^2 \int dx$ и соответственно энергия, приходящаяся на одну линию, равна

$$w_0 = \frac{U}{SH_x^{(0)}} = \frac{1}{8\pi}\mu H_x^{(0)} \int dx.$$

После деформации та же величина может быть записана в виде

$$w = \frac{\mu}{8\pi H_x^{(0)}} \left\{ \int [H_x^2 + H_y^2]\, dx \right\} \approx$$

$$\approx \frac{\mu}{8\pi H_y^{(0)}} \left\{ \int (H_x^{(0)})^2\, dx + \int (H_x^{(0)})^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \right\} =$$

$$= w_0 + \frac{\mu H_x^{(0)}}{8\pi} \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Приращение энергии магнитного поля, отнесенное к одной линии поля, равно

$$\Delta w = w - w_0 = \frac{\mu H_x^{(0)}}{8\pi} \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \tag{44,5}$$

Это приращение энергии происходит за счет работы, выполняемой движущейся жидкостью против упругой силы сопротивления линии напряженности.

Интересно сравнить полученное выражение с потенциальной энергией деформированной упругой струны. Если обозначить через α ее натяжение, то последняя величина может быть представлена в виде

$$\Delta U = \alpha \int \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1 \right\} dx,$$

где $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1$ — геометрическое удлинение струны при деформации. Считая отклонение малым, имеем [1])

$$\Delta U \approx \frac{\alpha}{2} \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \tag{44,6}$$

Сравнение (44,6) с (44,5) показывает, что линия напряженности магнитного поля в плазме ведет себя как струна с эффективным натяжением

$$\alpha_{\text{эфф}} = \frac{\mu H_x^{(0)}}{4\pi}. \tag{44,7}$$

---

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.

Если деформации линий поля нельзя считать малыми, выведенное выражение для увеличения энергии поля оказывается неприменимым. Однако общий результат сохраняется: деформация и растяжение линий напряженности магнитного поля, увлекаемых движущейся жидкостью, отвечает усилению поля.

Таким образом, движение проводящей жидкости может, в принципе, служить причиной генерации и усиления магнитного поля. С другой стороны, если жидкость помещена в достаточно сильное магнитное поле, то это поле может препятствовать движению жидкости, которая как бы отвердевает в магнитном поле. Магнитное поле затрудняет также переход от ламинарного движения проводящей жидкости к турбулентному.

Эти результаты оказалось возможным непосредственно проверить в лабораторных экспериментах.

В следующем параграфе будут рассмотрены некоторые важные следствия описанного свойства «вмороженного магнитного поля».

§ 45. Магнитогидродинамические волны

Аналогия между свойствами упругой нити и линии напряженности магнитного поля естественно наводит на мысль о возможности возникновения колебаний магнитного поля около некоторой равновесной конфигурации.

Рассмотрим плазменную жидкость, помещенную в магнитное поле напряженности $\boldsymbol{H}_0$. Поле $\boldsymbol{H}_0$ будем считать однородным и постоянным во времени. Пусть в жидкости возникает бесконечно малое возмущение в виде поля скоростей $\boldsymbol{v}$. Будем считать, что проводимость плазмы бесконечно велика, так что движение плазменной жидкости полностью увлекает с собой линии напряженности магнитного поля.

Тогда в поле скоростей напряженность магнитного поля можно представить в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}, \qquad (45,1)$$

где $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}, t)$ — бесконечно малое возмущение. Подставляя (45,1) в уравнение (44,4) и пренебрегая произведением бесконечно малых величин, имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}_0] = (\boldsymbol{H}_0 \operatorname{grad})\boldsymbol{v}. \qquad (45,2)$$

При этом мы воспользовались формулой (I,45) и условием несжимаемости жидкости:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \qquad (45,3)$$