Если деформации линий поля нельзя считать малыми, выведенное выражение для увеличения энергии поля оказывается неприменимым. Однако общий результат сохраняется: деформация и растяжение линий напряженности магнитного поля, увлекаемых движущейся жидкостью, отвечает усилению поля.

Таким образом, движение проводящей жидкости может, в принципе, служить причиной генерации и усиления магнитного поля. С другой стороны, если жидкость помещена в достаточно сильное магнитное поле, то это поле может препятствовать движению жидкости, которая как бы отвердевает в магнитном поле. Магнитное поле затрудняет также переход от ламинарного движения проводящей жидкости к турбулентному.

Эти результаты оказалось возможным непосредственно проверить в лабораторных экспериментах.

В следующем параграфе будут рассмотрены некоторые важные следствия описанного свойства «вмороженного магнитного поля».

§ 45. Магнитогидродинамические волны

Аналогия между свойствами упругой нити и линии напряженности магнитного поля естественно наводит на мысль о возможности возникновения колебаний магнитного поля около некоторой равновесной конфигурации.

Рассмотрим плазменную жидкость, помещенную в магнитное поле напряженности $\boldsymbol{H}_0$. Поле $\boldsymbol{H}_0$ будем считать однородным и постоянным во времени. Пусть в жидкости возникает бесконечно малое возмущение в виде поля скоростей $\boldsymbol{v}$. Будем считать, что проводимость плазмы бесконечно велика, так что движение плазменной жидкости полностью увлекает с собой линии напряженности магнитного поля.

Тогда в поле скоростей напряженность магнитного поля можно представить в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}, \qquad (45,1)$$

где $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}, t)$ — бесконечно малое возмущение. Подставляя (45,1) в уравнение (44,4) и пренебрегая произведением бесконечно малых величин, имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}_0] = (\boldsymbol{H}_0 \operatorname{grad})\boldsymbol{v}. \qquad (45,2)$$

При этом мы воспользовались формулой (I,45) и условием несжимаемости жидкости:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \qquad (45,3)$$

Уравнение движения жидкости (43,2) можно упростить, заметив, что в нашем случае бесконечно малой скорости можно написать

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{v}\approx\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t},$$

а пондеромоторную силу представить, как и при выводе (43,5), в виде

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mu}{c}[\boldsymbol{j}\boldsymbol{H}]=\frac{\mu}{4\pi}[\operatorname{rot}\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{H}]\approx\frac{\mu}{4\pi}[\operatorname{rot}\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{H}_0]$$

с точностью до величин второго порядка малости. По формуле (I, 47) имеем

$$[\operatorname{rot}\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{H}_0]=(\boldsymbol{H}_0\operatorname{grad})\boldsymbol{h}-\operatorname{grad}(\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{h}).$$

При этом мы учитываем, что $\boldsymbol{H}_0$ — постоянный вектор. Поэтому уравнения движения жидкости (43,2) гласят:

$$\delta_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\left(p+\frac{\mu(\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{h})}{4\pi}\right)+\frac{\mu}{4\pi}(\boldsymbol{H}_0\operatorname{grad})\boldsymbol{h}. \qquad (45,4)$$

Не ограничивая общности, можно выбрать направление невозмущенного поля $\boldsymbol{H}_0$ за ось x. Тогда уравнения (45,2) и (45,4) перепишутся в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}=H_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}, \qquad (45,5)$$

$$\delta_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\left(p+\frac{\mu H_0 h}{4\pi}\right)+\frac{\mu}{4\pi}H_0\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x}. \qquad (45,6)$$

Легко показать, что решение системы уравнений (45,5)—(45,6) представляет систему плоских волн, распространяющихся вдоль оси x (в направлении невозмущенного поля).

Из условий (45,3) и (22,5) вытекает, что такие волны должны быть поперечными. Выбирая вектор $\boldsymbol{h}$ за ось y и проектируя уравнения (45,5)—(45,6) на оси координат, имеем

$$h_x=0, \qquad (45,7)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t}=H_0\frac{\partial v_y}{\partial x}, \qquad (45,8)$$

$$h_z=0, \qquad (45,9)$$

$$v_x=0, \qquad (45,10)$$

$$\delta_0\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\mu}{4\pi}H_0\frac{\partial h_y}{\partial x}, \qquad (45,11)$$

$$v_z=0. \qquad (45,12)$$

При этом мы предположили, что давление также зависит только от координаты x и вектор ∇p не имеет y-й и z-й проекций.

Дифференцируя (45,11) по t и учитывая (45,8), получаем

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2}-\frac{1}{c_{\text{м}}^2}\frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2}=0. \tag{45,13}$$

Аналогично, дифференцируя (45,11) по t и учитывая (45,8):

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}-\frac{1}{c_{\text{м}}^2}\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2}=0, \tag{45,14}$$

где обозначено

$$c_{\text{м}}^2=\frac{\mu H_0^2}{4\pi\delta_0}. \tag{45,15}$$

Уравнения (45,13) и (45,14) показывают, что возмущение, возникшее в плазме, распространяется с постоянной скоростью $c_{\text{м}}$, определяемой формулой (45,15) в виде плоских волн вдоль магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$:

$$v_y=ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{45,16}$$

$$h_y=be^{i(kx-\omega t)}. \tag{45,17}$$

Эти волны получили название магнитогидродинамических волн Альфвена.

Мы для краткости записи считаем эти волны монохроматическими и распространяющимися в положительном направлении оси x. В общем случае можно разложить сложные волны на совокупность монохроматических волн. Замечательной особенностью магнитогидродинамических волн является то, что они распространяются в несжимаемой проводящей жидкости.

Как известно, в непроводящей жидкости могут распространяться только звуковые волны, связанные с изменением плотности среды.

Поперечный характер магнитогидродинамических волн ясен из предыдущего. Скорость их распространения определяется свойствами среды и напряженностью постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$. Связь между амплитудами магнитного поля и скорости получается подстановкой (45,16) и (45,17) в исходные уравнения:

$$|v_y|=\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\delta_0}}\,|h_y|.$$

Само собой разумеется, что наряду с магнитным полем в магнитогидродинамической волне имеется и электрическое поле, определяемое уравнением Максвелла (22,6):

$$E_z = |h_y| \frac{H_0 \mu^{3/2}}{c \sqrt{4\pi\delta_0}} e^{i(kx-\omega t)}.$$

Полезно заметить, что магнитогидродинамические волны могут быть получены из наглядных соображений, связанных с аналогией между векторными линиями магнитного поля и упругой струной. Как известно[1]), уравнение движения струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0,$$

где ζ — поперечное смещение и c — скорость распространения волн по струне, равная

$$c = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta_0}}.$$

Если вместо α подставить ее эффективное значение (44,7) то c совпадает со скоростью распространения магнитогидродинамических волн.

Магнитогидродинамические волны по существу являются специальным случаем электромагнитных волн в проводящей среде. Именно, при наличии достаточно сильного магнитного поля в проводящей жидкой среде происходит сильиое затухание электромагнитных волн, распространяющихся во всех направлениях, кроме направления магнитного поля. Такнм образом, проводящая жидкость имеет резко выраженную анизотропию электромагнитных свойств.

Если написать скорость распространения магнитогидродинамических волн в виде

$$c_{\text{м}} = \frac{c_{\text{эфф}}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c_{\text{эфф}}$ — скорость, заменяющая скорость света в аналогичной формуле, то диэлектрическая проницаемость проводящей жидкости оказывается равной

$$\varepsilon = \frac{4\pi c_{\text{эфф}}^2 \delta_0}{\mu^2 H_0^2}.$$

При $c_{\text{эфф}} \approx 100 \frac{см}{сек}$, что отвечает значениям поля $H_0 \approx 300$ *гс* и $\delta_0 \approx 1$, ε имеет порядок $3 \cdot 10^{18}$.

---

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951, стр. 22.

Магнитогидродинамические волны, как и всякие электромагнитные волны, переносят энергию. Поток энергии, переносимый магнитогидродинамической волной, распространяется со скоростью $c_м$, которая в достаточно сильном поле H_0, весьма велика по сравнению со скоростью движения вещества в плазменной жидкости $|\boldsymbol{v}|$.

Таким образом, в отличие от обычной непроводящей жидкости, в плазме, находящейся в магнитном поле H_0, всегда имеется механизм, обеспечивающий быстрый перенос энергии возникающего возмущения.

Описанные выше свойства плазменного состояния определяют поведение вещества при высоких температурах, когда атомы являются в значительной мере ионизованными. Поэтому изучение плазменного состояния важной, с одной стороны, для астрофизики, а с другой — для работы в области получения управляемых термоядерных реакций.

Мы не можем в рамках этой книги осветить указанные обширные области исследований и отсылаем читателя к специальной литературе.

§ 46. Плазма в высокочастотном электрическом поле

Выше, при рассмотрении поведения плазмы в стационарных и квазистационарных полях, мы пренебрегали токами смещения и считали плазму однородной проводящей жидкостью. Это приближение магнитной гидродинамики оказывается, однако, неудовлетворительным в области высокочастотных процессов.

При процессах, происходящих в полях высокой частоты, сказывается существенное различие в массах электронов и тяжелых ионов. В этом случае достаточно хорошим приближением часто оказывается так называемая двухжидкостная модель.

В приближении двухжидкостной модели (ее лучше было бы назвать моделью газовой смеси) ионы и электроны считаются двумя идеальными газами, движущимися независимо друг от друга под действием соответствующих сил.

Для электронов и ионов порознь можно написать уравнения движения — уравнения гидродинамики:

$$mn\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + enE. \qquad (46,1)$$

Все величины — заряд, масса и число частиц n в 1 $см^3$ — отнесены к электронам и ионам. Для краткости записи мы опускаем индекс, характеризующий сорт частиц. Уравнение непрерывности