

Магнитогидродинамические волны, как и всякие электромагнитные волны, переносят энергию. Поток энергии, переносимый магнитогидродинамической волной, распространяется со скоростью c_m , которая в достаточно сильном поле H_0 , весьма велика по сравнению со скоростью движения вещества в плазменной жидкости $|v|$.

Таким образом, в отличие от обычной непроводящей жидкости, в плазме, находящейся в магнитном поле H_0 , всегда имеется механизм, обеспечивающий быстрый перенос энергии возмущающего возмущения.

Описанные выше свойства плазменного состояния определяют поведение вещества при высоких температурах, когда атомы являются в значительной мере ионизованными. Поэтому изучение плазменного состояния важной, с одной стороны, для астрофизики, а с другой — для работы в области получения управляемых термоядерных реакций.

Мы не можем в рамках этой книги осветить указанные обширные области исследований и отсылаем читателя к специальной литературе.

§ 46. Плазма в высокочастотном электрическом поле

Выше, при рассмотрении поведения плазмы в стационарных и квазистационарных полях, мы пренебрегали токами смещения и считали плазму однородной проводящей жидкостью. Это приближение магнитной гидродинамики оказывается, однако, неудовлетворительным в области высокочастотных процессов.

При процессах, происходящих в полях высокой частоты, сказывается существенное различие в массах электронов и тяжелых ионов. В этом случае достаточно хорошим приближением часто оказывается так называемая двухжидкостная модель.

В приближении двухжидкостной модели (ее лучше было бы назвать моделью газовой смеси) ионы и электроны считаются двумя идеальными газами, движущимися независимо друг от друга под действием соответствующих сил.

Для электронов и ионов порознь можно написать уравнения движения — уравнения гидродинамики:

$$m n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + e n \mathbf{E}. \quad (46,1)$$

Все величины — заряд, масса и число частиц n в 1 см^3 — отнесены к электронам и ионам. Для краткости записи мы опускаем индекс, характеризующий сорт частиц. Уравнение непрерывности

также записывается отдельно для электронов и ионов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0. \quad (46,2)$$

Давление в плазме для каждого сорта частиц мы будем считать равным газовому давлению

$$p = nkT. \quad (46,3)$$

Наконец, будем считать, что колебания, которые совершают заряды под действием поля E , являются незатухающими.

В части VI вопрос о затухании будет рассмотрен детально и будет показано, что в действительности в плазме происходят диссипативные процессы, играющие важную роль в ряде процессов. Однако здесь мы можем пренебречь диссипативными процессами и считать колебания адиабатическими, так что давление и плотность связаны между собой уравнением адиабаты.

С учетом этого, для ∇p в (46,1) можно написать

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_S \nabla n,$$

так что

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_S \nabla n + en\mathbf{E}. \quad (46,4)$$

Будем считать, что поле E — поле электромагнитной волны в плазме, изменяется по закону

$$E \sim e^{i(kr - \omega t)}.$$

Будем считать, что под действием поля заряды совершают малые колебания; происходящие при этом изменения плотности в плазме также малы, и можно написать

$$n = n_0 + n', \quad n' \ll n_0,$$

где n_0 — плотность плазмы в отсутствие внешнего поля E . Будем пытаться искать решение написанной системы уравнений в виде

$$\mathbf{v} \sim n' \sim p' \sim e^{i(kr - \omega t)}, \quad (46,5)$$

пренебрегая квадратами указанных малых величин. Тогда имеем

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (46,6)$$

$$mn_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_S \nabla n' + en_0 \mathbf{E}. \quad (46,7)$$

Подставляя в (46,6) и (46,7) экспоненциальные функции, находим

$$n' = \frac{n_0}{\omega} (k\mathbf{v}), \quad (46,8)$$

$$\mathbf{v} = i \frac{e\mathbf{E}}{m\omega} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_S \frac{\mathbf{k} (k\mathbf{v})}{m\omega^2}. \quad (46,9)$$

Если выбрать направление вектора \mathbf{k} за ось z , то в изотропной плазме вектор скорости можно представить в виде $\mathbf{v} = (v_{\parallel}, \mathbf{v}_{\perp})$, где v_{\parallel} — компонента вектора в направлении распространения волны и \mathbf{v}_{\perp} — вектор скорости в плоскости (xy) . Из (46,9) имеем

$$\mathbf{v}_{\perp} = i \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}_{\perp}, \quad v_{\parallel} = \frac{ieE_z}{m\omega} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_S \frac{k^2}{m\omega^2} v_{\parallel}, \quad (46,10)$$

или

$$v_{\parallel} = \frac{ieE_z}{m\omega \left(1 - \frac{k^2}{n_0 \gamma_S m\omega^2} \right)}, \quad (46,11)$$

где

$$\gamma_S = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial n}{\partial \rho} \right)_S$$

— согласно (31,10) ч. III, коэффициент адиабатической сжимаемости.

Зная скорость, приобретаемую зарядом в поле волны, мы можем написать среднюю плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = \sum e n_0 \mathbf{v}.$$

Суммирование ведется по всем сортам частиц. Учитывая (46,10) и (46,11), находим

$$\mathbf{j}_{\perp} = i \sum \frac{e^2 n_0}{m\omega} \mathbf{E}_{\perp}, \quad (46,12)$$

$$j_{\parallel} = i \sum \frac{e^2 n_0}{m\omega^2 \left(1 - \frac{k^2}{n_0 \gamma_S m\omega^2} \right)} E_{\parallel}. \quad (46,13)$$

Пользуясь общей формулой (31,12), находим для компонент тензора диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2}, \quad (46,14)$$

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2 \left(1 - \frac{k^2}{n_0 \gamma_S m\omega^2} \right)}. \quad (46,15)$$

Мы видим, что в изотропной плазме имеет место явление пространственной дисперсии: ее диэлектрические свойства описываются тензором ϵ_{ij} , зависящим от ω и k и разным в направлении распространения и в перпендикулярном направлении.

Мы можем теперь воспользоваться полученными формулами для нахождения конкретного закона дисперсии в плазме, воспользовавшись дисперсионными уравнениями (33,17) и (33,18).

Введем, прежде всего, важные величины

$$\omega_L^{эл} = \frac{4\pi e^2 n_0^{эл}}{m}, \quad (46,16)$$

именуемые плазменной или лагмюровской частотой для электронов, и

$$\omega_L^{ион} = \frac{4\pi e^2 n_0^{ион} Z^2}{m_{ион}}, \quad (46,17)$$

представляющую ионную плазменную частоту, которая меньше электронной в отношении $\frac{m}{m_{ион}}$. При обычной концентрации электронов в плазме ($n_0^{эл} \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\omega_L \sim 6 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$) диэлектрическая проницаемость плазмы оказывается всегда меньшей единицы. Тогда имеем

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \simeq 1 - \frac{(\omega_L^{эл})^2}{\omega^2}, \quad (46,18)$$

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{(\omega_L^{эл})^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{k^2}{n_0 \gamma_S m \omega^2}\right)} - \frac{(\omega_L^{ион})^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{k^2}{n_0 \gamma_S m \omega^2}\right)}. \quad (46,19)$$

С учетом этих значений (33,17) дает

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{(\omega_L^{эл})^2}{\omega^2}\right) - k^2 = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = (\omega_L^{эл})^2 + c^2 k^2. \quad (46,20)$$

Формула (46,20) определяет закон дисперсии поперечных электромагнитных волн в плазме. При $\omega > \omega_L^{эл}$ каждой частоте отвечает распространение двух волн с различной поляризацией.

При $\omega < \omega_L^{эл}$ значения волнового числа k оказываются мнимыми. Это означает, что волны испытывают затухание,

подобное обычному скин-эффекту. Коэффициент затухания равен

$$\kappa = \sqrt{\frac{(\omega_L^{эл})^2}{\omega^2} - 1}.$$

Рассмотрим теперь продольную волну в плазме. Если частота $\omega_L^{эл}$ велика по сравнению с ионной плазменной частотой, $\omega \gg \omega_L^{ион}$, то из (33,18) и (46,19) находим

$$\epsilon_{\parallel} \simeq 1 - \frac{(\omega_L^{эл})^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{k^2}{\gamma_S n_0^{эл} m \omega^2} \right)} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = (\omega_L^{эл})^2 + \frac{k^2}{\gamma_S n_0^{эл} m}. \quad (46,21)$$

Из формулы (46,21) следует, что частота продольных волн всегда близка к плазменной. Они могут распространяться только при $\omega > \omega_L^{эл}$. Продольные волны в плазме имеют простой смысл. В нашем приближении, когда мы положили $\omega_L^{ион} \rightarrow 0$, т. е. $m_{ион} \rightarrow \infty$, тяжелые ионы неподвижны. В равновесии электроны распределены относительно ионов в виде электронных облаков, рассмотренных в § 41.

При нарушении равновесия электроны смещаются относительно неподвижных ионов и совершают колебания с плазменной частотой $\omega_L^{эл}$. Второе слагаемое связано с волнами адиабатического сжатия газовой плазмы. Эти волны подобны звуковым, однако, в отличие от газа нейтральных частиц, сжатие и разрежение сопровождаются разделением зарядов.

Величина γ_S может быть легко найдена из уравнения адиабаты

$$p/n^h = \text{const},$$

если принять, что $h=3$. Значение показателя адиабаты отвечает одной степени свободы — движению вдоль направления распространения волны. Тогда

$$\frac{1}{\gamma_S m n_0} = \overline{3v^2},$$

так что

$$\omega^2 = (\omega_L^{эл})^2 + 3\overline{v^2} k^2, \quad (46,22)$$

где $\sqrt{\overline{v^2}}$ — среднеквадратичная скорость теплового движения

частиц. При уменьшении длины волны второе слагаемое в (46,22) возрастает. Однако при $v^2 k^2 \sim (\omega_L^{\text{эл}})^2$, что, как легко видеть, отвечает $\lambda \sim \frac{1}{\kappa}$, фазовая скорость волн оказывается сравнимой с тепловой скоростью электронов. При этом наступает резкое затухание продольных плазменных волн. При $\omega < \omega_L^{\text{эл}}$, как видно из (46,21), значения k оказываются мнимыми, что отвечает затуханию волн. Глубина проникновения оказывается, как видно из (46,21), равной дебаевской длине. Таким образом, плазменные колебания обладают частотами, близкими к плазменной частоте $\omega_L^{\text{эл}}$. Все другие частоты либо не проникают в плазму, либо быстро затухают¹⁾.

Мы не будем останавливаться на волнах, отвечающих колебаниям ионов.

Рассмотрим теперь явления, возникающие в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле. Чтобы не усложнять выкладок, мы ограничимся случаем волн, у которых направление распространения совпадает с внешним полем H_0 . Полагая $\mu = 1$, вместо (46,1) можно написать

$$m n_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e n_0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} H_0] \right) - \nabla p.$$

Мы считаем, что внешнее магнитное поле велико по сравнению с полем электромагнитной волны.

Для дальнейшего нам понадобится учет поляризации волн. Будем считать ее поляризованной по кругу, так что

$$\mathbf{E} = A (\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2) e^{i(kz - \omega t)},$$

где единичные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 направлены по осям x и y , соответственно, а направление распространения принято за ось z . Повторяя все предыдущие выкладки, без труда получим вместо (46,10)

$$\mathbf{v}_\perp = i \frac{e \mathbf{E}_\perp}{m (\omega \pm \omega_c)}, \quad (46,23)$$

где ω_c — циклотронная частота $\frac{e H_0}{m c}$. Соответственно вместо (46,18) находим

$$\epsilon_\perp = 1 - \frac{(\omega_L)^2}{\omega (\omega \pm \omega_c)}. \quad (46,24)$$

Мы видим, что значение диэлектрической проницаемости ϵ_\perp , или

¹⁾ См. Вопросы теории плазмы, вып 3, Москва, 1963. Шафранов «Электромагнитные волны в плазме», в которой весьма обстоятельно рассмотрен весь круг вопросов, связанных с электромагнитными процессами в плазме.

коэффициента преломления $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$, оказывается зависящей от направления поляризации. Правой (знак плюс) и левой (знак минус) поляризации отвечают разные значения показателя преломления. Иными словами n имеет разные значения в зависимости от взаимоотношения между направлением вращения вектора \mathbf{E} в волне и движения электрона по круговой орбите в магнитном поле. Это явление носит название двоякого лучепреломления. Явление двоякого лучепреломления характерно для анизотропных сред (например, кристаллов). Мы видим, что во внешнем магнитном поле в области высоких частот, так же как и в постоянных полях, плазма приобретает анизотропные свойства.

При $\omega \simeq \omega_c$ для левой поляризации коэффициент преломления становится очень велик, что отвечает отражению волны от плазмы. При этом волна с правой поляризацией продолжает проникать в плазму.