ПРИЛОЖЕНИЕ I

Предполагая векторный анализ известным читателю, приводим сводку основных использованных в тексте формул.

Векторная алгебра

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_0 a,$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты), направленные по осям x, y, z, $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$.

$$(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{ba}) = ab\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \qquad (\mathrm{I}, 1)$$

$$[\boldsymbol{ab}] \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -[\boldsymbol{ba}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\boldsymbol{k}, \qquad (\mathrm{I}, 2)$$

$$|[\boldsymbol{ab}]| = ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}), \qquad (\mathrm{I}, 2')$$

$$(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]) = (\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]), \qquad (\mathrm{I}, 3)$$

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}), \qquad (\mathrm{I}, 4)$$

$$[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}), \qquad (\mathrm{I}, 5)$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})\} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}[\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]] + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})\}. \qquad (\mathrm{I}, 6)$$

Из (I, 5) легко выводится основная формула сферической тригонометрии. Пусть $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ — единичные радиусы-векторы вершин сферического треугольника со сторонами a, b и углами α, β, γ. Полагая в (I, 5) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_1$, находим

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2][\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3] = (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3) - (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3). \qquad (\mathrm{I}, 5')$$

По определению

$$r_1 r_2 = \cos\gamma; \quad r_2 r_3 = \cos\alpha; \quad r_3 r_1 = \cos\beta,$$

$$|[r_1 r_2]| = \sin\gamma; \quad |[r_1 r_3]| = \sin\beta;$$

$$[r_1 r_3][r_1 r_2] = \sin\beta\sin\gamma\cos\delta,$$

где δ — угол между плоскостями OAB и OAC.

Подстановка этих выражений в (I, 5′) дает основную формулу сферической тригонометрии:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\delta. \qquad (I,5'')$$

Полярными называются такие векторы, которые не изменяются при инверсии координатных осей $\boldsymbol{r} \to (-\boldsymbol{r})$. К полярным векторам принадлежат такие векторы как скорость, сила и т. п.

Аксиальными, или **псевдовекторами**, называются векторы, изменяющие свой знак при инверсии, т. е.

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{r}).$$

Аксиальным вектором является вектор, выражающий векторное произведение двух полярных векторов.

Векторный анализ

Дифференцирование вектора, зависящего от скалярного аргумента:

$$\frac{d\boldsymbol{a}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\boldsymbol{a}_0(x)\,a(x) = \boldsymbol{a}_0\frac{da}{dx} + a\frac{d\boldsymbol{a}_0}{dx} = \boldsymbol{a}_0\frac{da}{dx} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{b} = a\omega\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_0 \perp \boldsymbol{a}_0$ и $\omega = \left|\frac{d\boldsymbol{a}_0}{dx}\right|$ — быстрота изменения угла φ, определяющего ориентацию вектора $\boldsymbol{a}$.

Полная производная от $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ по времени равна

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + v_x\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A}. \qquad (I, 7)$$

Скалярное поле

Скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{r})$ характеризуется заданием скаляра φ в каждой точке пространства. Быстрота пространственного изменения скаляра $\varphi(\boldsymbol{r})$ характеризуется производной по данному направлению $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{i}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{j}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}) =$$

$$= |\boldsymbol{l}|\,|\mathrm{grad}\,\varphi|\cos(\boldsymbol{l}, \mathrm{grad}\,\varphi), \qquad (I, 8)$$

где градиент скаляра φ

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{I, 9}$$

представляет вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания φ и равный производной от φ в этом направлении.

Модуль градиента равен

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \tag{I, 10}$$

Дифференциальный оператор Гамильтона «набла» ∇ определяется соотношением

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{I, 11}$$

Значок ∇ не помечается шрифтом, так как это принято для векторов. Оператор Гамильтона есть символ, показывающий, какие операции нужно выполнить над стоящими после него функциями координат. Например, $\nabla\varphi$ означает, что от функции φ следует взять частные производные и построить вектор, компоненты которого равны этим частным производным.

С помощью (I, 11) можно формально записать (I, 9) в виде

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{I, 12}$$

Из определения (I, 11) следует

$$\nabla r = \boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{I, 13}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr}\operatorname{grad}r = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{I, 14}$$

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi, \tag{I, 15}$$

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi, \tag{I, 16}$$

$$\operatorname{grad}f(\varphi) = \frac{df}{d\varphi}\operatorname{grad}\varphi. \tag{I, 17}$$

При вычислении градиента от функций, зависящих от расстояния r между двумя данными точками,

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

нужно различать градиенты по координатам точек (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0).

Имеем

$$\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{i}(x-x_0)+\boldsymbol{j}(y-y_0)+\boldsymbol{k}(z-z_0)}{r},$$

$$\operatorname{grad}_0 r = -\frac{\boldsymbol{i}(x-x_0)+\boldsymbol{j}(y-y_0)+\boldsymbol{k}(z-z_0)}{r}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad}_0 \varphi(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}). \qquad \text{(I, 18)}$$

Линейный интеграл вектора $\boldsymbol{a}$ по контуру определен соотношением

$$\int_L \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = \int (a_x\, dl_x + a_y\, dl_y + a_z\, dl_z).$$

Циркуляцией именуется интеграл по замкнутому контуру

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l}.$$

Если вектор $\boldsymbol{a}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi,$$

то он называется потенциальным вектором, а φ — потенциалом. Циркуляция потенциального вектора равна нулю:

$$\oint \operatorname{grad}\varphi\, d\boldsymbol{l} = 0, \qquad \text{(I, 19)}$$

$$\int_L \operatorname{grad}\varphi\, d\boldsymbol{l} = \varphi(\boldsymbol{r}_1) - \varphi(\boldsymbol{r}_2). \qquad \text{(I, 20)}$$

Геометрическое изображение скалярного поля осуществляется нанесением линий равного потенциала: $\varphi = \text{const}$. Вектор $\operatorname{grad}\varphi$ направлен по нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$. Чем быстрее происходит изменение функции φ, тем больше $\operatorname{grad}\varphi$ и тем ближе друг к другу расположены линии равного потенциала.

Поверхностным интегралом от функции $\varphi(\boldsymbol{r})$ называется

$$\int \varphi(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{S} = \int \varphi \boldsymbol{n}\, dS = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\, \Delta \boldsymbol{S}_i.$$

Интеграл по замкнутой поверхности обозначается

$$\oint \varphi\, d\boldsymbol{S}.$$

Рассмотрим интеграл по поверхности бесконечно малого параллелепипеда с объемом $V \to 0$. Будем считать, что сторонами параллелепипеда являются бесконечно малые площадки $(dx\, dy)$,

$(dx\,dz)$, $(dy\,dz)$ на координатных поверхностях (xy), (xz) и (yz), взятые у начала координат.

Имеем, очевидно,

$$\oint_{V\to 0} \varphi\, d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{i}\{\varphi(0+dx)\,dy\,dz - \varphi(0)\,dy\,dz\} +$$
$$+ \boldsymbol{j}\{\varphi(0+dy)\,dx\,dz - \varphi(0)\,dx\,dz\} +$$
$$+ \boldsymbol{k}\{\varphi(0+dz)\,dx\,dy - \varphi(0)\,dx\,dy\} =$$
$$= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) V,$$

откуда находим равенство

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \varphi \boldsymbol{n}\, dS}{V}. \qquad (I, 21)$$

Формула (I, 21) позволяет дать второе интегральное определение оператора Гамильтона:

$$\nabla = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{n}\, dS}{V}, \qquad (I, 22)$$

идентичное с (I, 11).

Подчеркнем, что поскольку поверхность интегрирования стягивается в точку при стремлении V к нулю, интегральный оператор (I, 22) не зависит от формы этой поверхности.

Из (I, 21) следует интегральное соотношение

$$\oint \varphi\, d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{grad}\varphi\, dV, \qquad (I, 23)$$

связывающее поверхностный интеграл от скаляра φ с объемным интегралом от вектора $\operatorname{grad}\varphi$. Объем интегрирования правой части (I, 23) охватывается поверхностью S, по которой выполняется поверхностное интегрирование в левой части (I, 23).

Для доказательства формулы (I, 23) разобьем конечный объем на бесконечно малые объемы, для каждого из которых справедлива формула (I, 21). Проведем суммирование по всем этим объемам. Интегрирование по всем внутренним поверхностям, образующим границы между объемами, производится дважды. При этом направления внешних нормалей будут противоположными и интегралы по внутренним поверхностям будут взаимно сокращаться. Останутся лишь интегралы по всем внешним поверхностям, образующие в сумме интеграл по поверхности, охватывающей объем V.

Векторное поле

Векторным полем называется область пространства, в каждой точке которой задано значение вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Графическое изображение векторного поля осуществляется с помощью векторных линий. Вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0)$ является вектором касательной к векторной линии в точке $\boldsymbol{r}_0$. При этом векторные линии проводятся так, что густота линий пропорциональна абсолютному значению $|\boldsymbol{a}|$.

В векторном поле можно определить поток вектора через площадку, характеризуемую вектором $d\boldsymbol{S}$ в виде

$$dj = \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}. \qquad (\mathrm{I}, 24)$$

Поверхностным интегралом от вектора $\boldsymbol{a}$ именуется величина

$$j = \int\limits_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\, dS = \int a_n\, dS =$$
$$= \int a_x\, dy\, dz + \int a_y\, dx\, dz + \int a_z\, dx\, dy, \qquad (\mathrm{I}, 25)$$

где $dy\, dz = dS \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})$ и т. д.

Поверхностный интеграл представляет поток вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность S.

Если поверхность S замкнута, то поверхностный интеграл обозначается через $\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}$. Для поверхностного интеграла по замкнутой поверхности имеет место теорема Гаусса — Остроградского

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV. \qquad (\mathrm{I}, 26)$$

В (I, 26) интегрирование ведется по объему, охватываемому поверхностью интегрирования в поверхностном интеграле.

Доказательство проводится путем разбиения объема на бесконечно малые объемы. Оно может быть проведено формально с помощью определения (I, 22) оператора Гамильтона. Именно,

$$\nabla \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})\, dS}{V}, \qquad (\mathrm{I}, 27)$$

откуда, как и при выводе (I, 23), суммируя элементарные объемы, получаем

$$\int (\nabla \boldsymbol{a})\, dV = \oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

Пользуясь определением (I, 11), приходим к теореме (I, 26).

Скалярная величина, допускающая два тождественных представления,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{I, 28}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{an}\, dS}{V}, \tag{I, 29}$$

основанных на разных формах оператора Гамильтона, именуется дивергенцией или расхождением вектора $\boldsymbol{a}$. Теорему Гаусса — Остроградского можно переписать в виде

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV. \tag{I, 30}$$

Дивергенция играет важнейшую роль в теории векторного поля (см. § 2 ч. I книги).

Из выражения (I, 29) следует, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ представляет поток вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ через бесконечно малую поверхность, окружающую данную точку поля $\boldsymbol{r}$, отнесенный к единице объема.

Векторное поле называется соленоидальным, если в каждой точке поля

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0.$$

Это означает, что поток вектора через поперечное сечение трубки, образованной группой векторных линий, имеет постоянное значение вдоль трубки. В тех точках поля, в которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, имеются источники ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} > 0$) или стоки ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} < 0$) поля. Численное значение $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ называют мощностью или обильностью источников поля.

Имеют место очевидные формулы:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{div} \boldsymbol{a}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{a}_2, \\ \operatorname{div} c\boldsymbol{a} = c \operatorname{div} \boldsymbol{a}, \quad (c = \text{const}), \\ \operatorname{div} \varphi(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{div}_0 \varphi(r), \end{gathered} \tag{I, 31}$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2};$$

индекс 0 означает дифференцирование по координатам x_0, y_0, z_0.

Пусть $\boldsymbol{a}(u)$ — вектор, зависящий только от скалярной величины u. Тогда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(u) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{du} \nabla u\right) = (\dot{\boldsymbol{a}} \operatorname{grad} u), \tag{I, 32}$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу u.

Наряду с операцией $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, отвечающей скалярному произведению векторов ∇ и $\boldsymbol{a}$, можно рассмотреть операцию образования вектора

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla \boldsymbol{a}]. \tag{I, 33}$$

Вектор, представляющий векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора $\boldsymbol{a}$, носит название ротора или вихря вектора $\boldsymbol{a}$.

Вычисление по формуле (I, 2) с учетом (I, 11) дает

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \tag{I, 34}$$

Пользуясь теперь интегральным выражением оператора Гамильтона, имеем другое представление вектора:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]\, dS}{V}. \tag{I, 35}$$

Из определения (I, 35), аналогично (I, 23) и (I, 30), следует

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, dV = \oint [d\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]. \tag{I, 36}$$

Рассмотрим теперь проекцию вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ на произвольное направление, характеризуемое единичным вектором $\boldsymbol{N}$. Из того же определения (I, 35) следует

$$\boldsymbol{N} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\boldsymbol{N} \oint [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]\, dS}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{N}\boldsymbol{n}]\, dS}{V}.$$

Поскольку результат, получающийся после перехода к пределу, не зависит от формы поверхности, ее можно выбрать произвольно. Если направить ось z вдоль $\boldsymbol{N}$ и в качестве поверхности взять цилиндр с основанием S и высотой h, то

$$\oint \boldsymbol{a} [\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}]\, dS = \oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} h.$$

В выражении справа интегрирование ведется по боковой поверхности цилиндра, поскольку на его основаниях $\boldsymbol{n} \| \boldsymbol{N}$ и их векторное произведение обращается в нуль. Через $d\boldsymbol{l}$ обозначен элемент длины на боковой поверхности, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{N}$.

Отсюда следует

$$\boldsymbol{N}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \lim_{V\to 0}\frac{h}{Sh}\oint \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{l} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{l}.$$

Разбивая произвольный объем на указанные малые объемы и производя суммирование по ним, находим, что поверхностные интегралы по внутренним поверхностям и линейные интегралы по сторонам соприкасающихся ячеек взаимно сокращаются, так что

$$\oint \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{l} = \int \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}. \qquad \text{(I, 37)}$$

Формула (I, 37), связывающая линейный интеграл от вектора $\boldsymbol{a}$ по произвольному замкнутому контуру с поверхностным интегралом от $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, носит название теоремы Стокса.

Из вывода теоремы ясно, что интегрирование ведется по произвольной поверхности, опирающейся на контур интегрирования.

Из теоремы Стокса становится ясным геометрический смысл понятия ротора. Для того чтобы интеграл по замкнутому контуру от вектора $\boldsymbol{a}$ был отличен от нуля, необходимо, чтобы некоторые (хотя бы векторные) линии имели характер замкнутых кривых. Такими являются, например, линии вектора скорости вращения твердого тела или линии тока текущей жидкости, совершающей вихревое движение. Отсюда и название ротор или вихрь.

Из теоремы Стокса следует:

1) Если $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$, то $\oint \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{l} = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0, \qquad \text{(I, 38)}$$

т. е. если $\boldsymbol{a}$ — потенциальный вектор, то поле вектора $\boldsymbol{a}$ является безвихревым. Наоборот, всякий вектор, поле которого является безвихревым — вектор потенциальный.

2) Если вектор $\boldsymbol{a}$ является соленоидальным, так что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0,$$

то его можно представить в виде вихря некоторого вектора:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\boldsymbol{c}.$$

Наоборот, поле вектора $\boldsymbol{a}$, ротор которого отличен от нуля, имеет соленоидальный характер:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0.$$

Источники и стоки в вихревом поле отсутствуют. Доказательство этих утверждений проводится прямым вычислением. Например,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla [\nabla \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{a} [\nabla\nabla] = 0.$$

Образование скаляра $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ являются основными операциями дифференцирования вектора.

Расхождение и вихрь вектора $\boldsymbol{a}$ определяют само векторное поле (см. § 2 ч. I).

При вычислении дивергенции и вихря от вектора $\boldsymbol{a}(u)$, зависящего от скалярного аргумента u, получается

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(u) = (\nabla \boldsymbol{a}(u)) = \left(\nabla u \frac{d\boldsymbol{a}}{du}\right) = (\operatorname{grad} u, \dot{\boldsymbol{a}}), \qquad (I, 39)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(u) = \left[\nabla u \frac{d\boldsymbol{a}}{du}\right] = [\operatorname{grad} u, \dot{\boldsymbol{a}}], \qquad (I, 40)$$

где точка означает дифференцирование по скаляру u.

Вычисление производных от произведения и повторных производных. Эти операции осуществляются проще всего с помощью оператора Гамильтона. При этом должны соблюдаться два правила:

1. Оператор Гамильтона должен поочередно действовать на каждую расположенную за ним скалярную и векторную величины.

2 С оператором Гамильтона следует обращаться, как с обычным вектором, но его нельзя переставлять местами с той величиной, на которую он действует, и выносить последнюю за знак ∇. Для ясности при выполнении промежуточных преобразований мы будем указывать величину, на которую действует оператор Гамильтона, индексом внизу, например ∇_φ или ∇_a.

Важнейшие примеры:

$$1.\quad \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \nabla\varphi\psi = \varphi\nabla_\psi\psi + \psi\nabla_\varphi\varphi = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi. \qquad (I, 41)$$

$$2.\quad \operatorname{div}\psi\boldsymbol{a} = \nabla\varphi\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\nabla_\varphi\varphi + \varphi\nabla_a\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}. \qquad (I, 42)$$

В частности,

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \operatorname{div}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}\operatorname{grad}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r},$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = [\nabla, \varphi\boldsymbol{a}] = \varphi[\nabla_a\boldsymbol{a}] + [\nabla_\varphi\varphi, \boldsymbol{a}] = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{a}]. \qquad (I, 43)$$

$$3.\quad \operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \nabla[\boldsymbol{ab}] = \nabla_a[\boldsymbol{ab}] + \nabla_b[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b}[\nabla_a\boldsymbol{a}] - \nabla_b[\boldsymbol{ba}] =$$
$$= \boldsymbol{b}[\nabla_a\boldsymbol{a}] - \boldsymbol{a}[\nabla_b\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}. \qquad (I, 44)$$

Мы произвели циклическую перестановку векторов. Во втором слагаемом предварительно изменен порядок векторного умножения. В противном случае при циклической перестановке было бы нарушено правило 2: вектор $\boldsymbol{b}$ был бы передвинут за знак ∇_b.

4. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = [\nabla[\boldsymbol{ab}]] = [\nabla_a[\boldsymbol{ab}]] + [\nabla_b[\boldsymbol{ab}]] = (\nabla_a\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a} - (\nabla_a\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} + $
$$+ (\nabla_b\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a} - (\nabla_b\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}\nabla_a)\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\,(\nabla_a\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}\,(\nabla_b\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\nabla_b)\,\boldsymbol{b} =$$
$$= (\boldsymbol{b}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}. \qquad (\mathrm{I}, 45)$$

Здесь $(\boldsymbol{a}\operatorname{grad}) \equiv (\boldsymbol{a}\nabla)$ — скалярный дифференциальный оператор
$$(\boldsymbol{a}\nabla) = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (\mathrm{I}, 46)$$

5. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = \nabla_a(\boldsymbol{ab}) + \nabla_b(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{b}\nabla_a)\,\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{b}\,[\nabla_a\boldsymbol{a}]] + (\boldsymbol{a}\nabla_b)\,\boldsymbol{b} +$
$$+ [\boldsymbol{a}\,[\nabla_b\boldsymbol{b}]] = (\boldsymbol{b}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}]. \qquad (\mathrm{I}, 47)$$

6. $$\operatorname{grad}\frac{a^2}{2} = (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]. \qquad (\mathrm{I}, 48)$$

7. $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = (\nabla\nabla)\,\varphi = \Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi. \qquad (\mathrm{I}, 49)$$

8. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla\,[\nabla\boldsymbol{a}]] = \nabla\,(\nabla\boldsymbol{a}) - (\nabla\nabla)\,\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}. \qquad (\mathrm{I}, 50)$

9. $(\nabla\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = (\nabla_a\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} + (\nabla_b\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} =$
$$= \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\nabla_b)\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{b}. \qquad (\mathrm{I}, 51)$$

Из интегрального представления оператора Гамильтона следует формула
$$(\nabla\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint(\boldsymbol{na})\,\boldsymbol{b}\,dS,$$

из которой непосредственно получается
$$\int(\nabla\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}\,dV = \oint(\boldsymbol{na})\,\boldsymbol{b}\,dS \qquad (\mathrm{I}, 52)$$

или, в силу (I, 51),
$$\oint(\boldsymbol{na})\,\boldsymbol{b}\,dS = \int(\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a})\,dV + \int(\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{b}\,dV. \qquad (\mathrm{I}, 53)$$

Получим и другое интегральное равенство:
$$\int[\boldsymbol{b}\,[\nabla\boldsymbol{a}]]\,dV + \int[[\boldsymbol{a}\nabla]\,\boldsymbol{b}]\,dV = -\oint[[\boldsymbol{na}]\,\boldsymbol{b}]\,dS. \qquad (\mathrm{I}, 54)$$

Из интегрального представления оператора Гамильтона следует формула
$$[[\nabla\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{b}] = \lim_{V\to 0}\oint[[\boldsymbol{na}]\,\boldsymbol{b}]\,dS,$$

откуда

$$\int [[\nabla a] b]\, dV = \oint [[na] b]\, dS. \tag{I, 55}$$

С другой стороны, имеем

$$[[\nabla a] b] = [[\nabla_a a] b] + [[\nabla_b a] b] = -[b \operatorname{rot} a] - [[a\nabla] b].$$

Подставляя это в (I, 55), приходим к (I, 54).

Представление векторных операций в криволинейных координатах.

Наряду с декартовыми координатами часто удобно пользоваться криволинейными координатами q_1, q_2 и q_3. Каждой точке r отвечает совокупность величин q_1, q_2 и q_3, т. е.

$$r = r(q_1, q_2, q_3). \tag{I, 56}$$

Поскольку векторные операции не связываются с какой-либо конкретной системой координатных осей, соотношения векторного анализа остаются справедливыми в любом координатном представлении. Однако конкретное выражение векторных операций в криволинейных координатах, естественно, не совпадает с декартовым.

В рамках этой книги будут использоваться только ортогональные координаты. Назовем три поверхности,

$$q_i = q_i(x, y, z) = \mathrm{const} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{I, 57}$$

координатными поверхностями, а линии их пересечения координатными линиями. Очевидно, что совокупность трех координатных поверхностей является обобщением координатного трехгранника в декартовой системе координат. Направления координатных линий характеризуются единичными векторами e_1, e_2, e_3. Ортогональными системами координат именуют такие, в которых векторы e_1, e_2 и e_3 взаимно перпендикулярны.

Производная по координатам q_i равна

$$\frac{\partial r}{\partial q_i} = \frac{\partial r(q_1, q_2, q_3)}{dq_i} = H_i e_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{I, 58}$$

Вектор $\frac{\partial r}{\partial q_i}$ направлен по касательной к координатной линии q_i, и его величина H_i является функцией координат q_1, q_2, q_3. Очевидно,

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2. \tag{I, 59}$$

Три величины H_i $(i = 1, 2, 3)$ носят название коэффициентов Ляме. С их помощью можно написать

$$dr = H_1\, dq_1 e_1 + H_2\, dq_2 e_2 + H_3\, dq_3 e_3 \tag{I, 60}$$

или, в проекциях,

$$(d\boldsymbol{r})_1 = H_1\, dq_1; \quad (d\boldsymbol{r})_2 = H_2\, dq_2; \quad (d\boldsymbol{r})_3 = H_3\, dq_3. \qquad (\mathrm{I}, 61)$$

Возводя (I, 60) в квадрат, находим квадрат длины в криволинейных ортогональных координатах

$$(d\boldsymbol{r})^2 = ds^2 = H_1^2\, dq_1^2 + H_2^2\, dq_2^2 + H_3^2\, dq_3^2. \qquad (\mathrm{I}, 62)$$

Элемент площади легко найти, рассматривая бесконечно малый параллелепипед, образованный координатными поверхностями. Площади его граней

$$dS_1 = H_2 H_3\, dq_2\, dq_3; \quad dS_2 = H_1 H_3\, dq_1\, dq_3; \quad dS_3 = H_1 H_2\, dq_1\, dq_2. \qquad (\mathrm{I}, 63)$$

Объем параллелепипеда равен

$$dV = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \qquad (\mathrm{I}; 64)$$

Важнейшими ортогональными координатами являются цилиндрические и сферические координаты.

В сферических координатах

$$q_1 = r; \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \psi. \qquad (\mathrm{I}, 65)$$

Очевидно, имеем

$$(d\boldsymbol{r})_r = dr, \quad (d\boldsymbol{r})_\theta = r\, d\theta, \quad (d\boldsymbol{r})_\psi = r \sin\theta\, d\psi. \qquad (\mathrm{I}, 66)$$

Сравнение с (I, 61) дает

$$\left.\begin{aligned} &H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\psi = r\sin\theta; \\ &dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi. \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{I}, 67)$$

В цилиндрической системе координат

$$\left.\begin{aligned} &q_1 = \rho, \quad q_2 = \psi, \quad q_3 = z, \\ &(d\boldsymbol{r})_\rho = d\rho, \quad (d\boldsymbol{r})_\psi = \rho\, d\psi, \quad (d\boldsymbol{r})_z = dz, \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{I}, 68)$$

и из (I, 61)

$$\left.\begin{aligned} &H_\rho = 1, \quad H_\psi = \rho, \quad H_z = 1, \\ &dV = \rho\, d\rho\, d\psi\, dz. \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{I}, 69)$$

Выражения для векторных операций получаются из их определений с учетом выписанных соотношений:

1. $$\operatorname{grad}\varphi = \frac{e_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{e_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{e_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}. \qquad (\mathrm{I}, 70)$$

В частности, в сферической и цилиндрической системах координат соответственно имеем

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\boldsymbol{e}_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}, \tag{I, 71}$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\boldsymbol{e}_\psi}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{I, 72}$$

2. $\operatorname{div}\boldsymbol{a} =$

$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right\}. \tag{I, 73}$$

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(r^2a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi}, \tag{I, 74}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{I, 75}$$

3. $$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right\}. \tag{I, 76}$$

Остальные проекции получаются циклической перестановкой координат 1, 2, 3.

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\psi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\psi}, \tag{I, 77}$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\psi)}{\partial r}, \tag{I, 78}$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}, \tag{I, 79}$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\psi} - \frac{\partial a_\psi}{\partial z}, \tag{I, 80}$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\psi = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}, \tag{I, 81}$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(a_\psi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\psi}. \tag{I, 82}$$

4. Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right\}. \quad (I, 83)$$

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}, \quad (I, 84)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (I, 85)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начало тензорного исчисления изд. АН СССР, 1953, и др. издания.
2. Я. И. Френкель, Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1940.