ПРИЛОЖЕНИЕ II

Интеграл Фурье

Всякая периодическая в области $l = \frac{2\pi}{\omega}$ функция, т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$f(t+l) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(t),$$

может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t}.$$

Коэффициенты Фурье даются формулой

$$f_n(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-in\omega\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Разложение в ряд Фурье означает, что произвольная периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ может быть представлена в виде наложения (спектра) бесконечного числа монохроматических функций с периодами $\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{2\pi}{2\omega}$, ..., $\frac{2\pi}{n\omega}$ или частотами: ω, 2ω, ..., $n\omega$ и т. д.

Условия, при которых возможно разложение в ряд Фурье, обычно выполняются в физических приложениях.

Переходя к пределу, когда период неограниченно возрастает, (т. е. $\omega \to 0$), а частоты сближаются между собой, можно получить разложение в интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \qquad (II, 1)$$

Функция $F(\omega)$, именуемая компонентой Фурье от функции $f(t)$, дается формулой

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt. \qquad \text{(II, 2)}$$

Разложение в интеграл Фурье возможно, если свойства $f(t)$ обеспечивают сходимость (II, 1)—(II, 2). Обычно в физических приложениях $f(t)$ стремится к нулю при $t\to\pm\infty$, что обеспечивает сходимость этих выражений.

Интеграл Фурье можно записать в более симметричном виде:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(\omega)\,d\omega, \qquad \text{(II, 3)}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)\,dt. \qquad \text{(II, 4)}$$

Если $f(t)$ — вещественная функция, то $F(\omega)$ — комплексная функция, причем

$$F^*(\omega)=F(-\omega). \qquad \text{(II, 5)}$$

Формулы (II, 3) и (II, 4) можно объединить в виде выражения

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau}f(\tau), \qquad \text{(II, 6)}$$

также называемого часто интегралом Фурье.

Формула (II, 3) показывает, что $f(t)$ представляет собой сумму монохроматических слагающих $e^{i\omega t}$, которые берутся с весами (амплитудами) $\frac{F(\omega)\,d\omega}{\sqrt{2\pi}}$.

Комплексную амплитуду $F(\omega)$ можно написать в виде

$$F(\omega)=A(\omega)\,e^{i\varphi(\omega)}, \qquad \text{(II, 7)}$$

где $A(\omega)$ — модуль и $\varphi(\omega)$ — фаза функции $F(\omega)$, являющиеся вещественными функциями частоты ω. В таком представлении для интеграла Фурье имеем

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\,e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}d\omega. \qquad \text{(II, 8)}$$

Докажем важное равенство, иногда именуемое соотношением Парсеваля для интеграла Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega. \qquad (II,9)$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\,dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}\, d\omega \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt \right\} d\omega.$$

Но, по определению (II, 4),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt = F^*(\omega) = A(\omega)\, e^{-i\varphi(\omega)}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega))^2\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega,$$

что и требовалось доказать.