ПРИЛОЖЕНИЕ III

Дельта-функция и ее свойства

δ-функция была введена Дираком[1]) и оказалась весьма полезной при рассмотрении различных вопросов теоретической физики. δ-функция определяется соотношениями

$$\delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$
$$\delta(x) = \infty \quad \text{при} \quad x = 0$$

так, что

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1, \quad \text{где} \quad a < 0 < b. \qquad \text{(III, 1)}$$

Из определения (III, 1) сразу следует основное свойство δ-функции:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0), \quad a < 0 < b, \qquad \text{(III, 2)}$$

а $f(x)$ — произвольная непрерывная функция x.

Действительно, благодаря свойствам δ-функции в интеграле (III, 2) играет роль лишь окрестность точки $x = 0$. Тогда функцию $f(x)$ можно в точке $x = 0$ вынести за знак интеграла, а оставшийся интеграл в силу (III, 1) равен единице. Интеграл (III, 2) можно переписать также в виде

$$\int f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0). \qquad \text{(III, 3)}$$

Область интегрирования в (III, 3) должна включать точку $x = x_0$, иначе интеграл обращается в нуль:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = 0, \quad \begin{cases} x_0 > b, \\ x_0 < a. \end{cases} \qquad \text{(III, 3')}$$

---

[1]) П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ГИТТЛ, 1937.

δ-функция не может входить ни в какие окончательные выражения. Всегда, когда пишется δ-функция, то имеется в виду в дальнейшем интегрирование по тем переменным, от которых она зависит; δ-функцию можно рассматривать как предел последовательности аналитических функций.

В частности, такими свойствами обладает выражение

$$F(\alpha, x) = \frac{\sin \alpha x}{\pi x},$$

которое ведет себя при $\alpha \to \infty$ как $\delta(x)$. Действительно, при $x = 0$ $F(\alpha, x)|_{x=0} = \frac{\alpha}{\pi}$ и расходится при $\alpha \to \infty$. При $x \neq 0$ $F(\alpha, x)$ сильно осциллирует около нулевого значения, причем с затухающей амплитудой. Наконец,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}\, dx = 1$$

при любом α. Мы видим, следовательно, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} = \delta(x). \tag{III, 4}$$

Другие примеры δ-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}; \tag{III, 4$'$}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \alpha e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}; \tag{III, 4$''$}$$

$$\delta(x) = -\lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + 1\right)^2}. \tag{III, 4$'''$}$$

Через δ-функцию выражается часто встречающийся интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk,$$

который следует понимать, как

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx}\, dk = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{x} \sin \alpha x.$$

Сравнивая с (III, 4), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk = 2\pi\,\delta(x). \tag{III, 5}$$

δ-функция может быть определена и как производная от некоторой разрывной функции $\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= 0, \quad x<0; \\ \varepsilon(x) &= 1, \quad x>0. \end{aligned} \tag{III, 6}$$

Очевидно, $\varepsilon'(x)=0$ при $x \neq 0$. Покажем, что имеет место и равенство (III, 2):

$$\int_a^b f(x)\,\varepsilon'(x)\,dx = f(x)\,\varepsilon(x)\big|_a^b - \int_a^b \varepsilon(x)\,f'(x)\,dx =$$

$$= f(b) - \int_0^b f'(x)\,dx = f(0).$$

Следовательно,

$$\varepsilon'(x) = \delta(x). \tag{III, 7}$$

Выпишем некоторые основные свойства δ-функции:

$$\left.\begin{gathered}
\delta(-x) = \delta(x), \qquad \delta'(-x) = -\delta'(x), \\
x\delta(x) = 0, \qquad x\delta'(x) = -\delta(x), \\
\delta(ax) = \frac{1}{a}\,\delta(x), \quad a>0, \\
\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2a}\,[\delta(x-a)+\delta(x+a)], \\
\int \delta(a-x)\,\delta(x-b)\,dx = \delta(a-b), \\
f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a), \\
\int f(x)\,\delta'(x-a)\,dx = -f'(a), \\
\delta(f)\,df = \delta(x)\,dx, \qquad \delta[f(x)] = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|}\,\delta(x-x_0), \\
\text{где } x_0 \text{ определено условием } f(x_0)=0, \\
\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\,\delta(\omega-\boldsymbol{kv})\,d\boldsymbol{k}\,d\omega.
\end{gathered}\right\} \tag{III, 8}$$

Так как δ-функция имеет смысл, если только имеется в виду интегрирование по ее аргументу, то и эти равенства означают, что, умножая левую часть каждого из этих равенств на непрерывную функцию $f(x)$ и интегрируя по x, мы придем к тем же результатам, какие дадут и правые части равенств. Докажем, например, третье соотношение. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int f(x)\, x\delta(x)\, dx = f(x)\, x\,|_{x=0} = 0$$

и соотношение доказано.

δ-функция оказывается часто полезной при рассмотрении интегралов Фурье. Так, если мы имеем разложение некоторой функции $f(x)$ в интеграл Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k)\, e^{ikx}\, dk, \tag{III, 9}$$

то, пользуясь (III, 5), мы сразу получаем выражение для обращенного интеграла Фурье. Действительно, умножая левую и правую части равенства (III, 9) на $e^{-ik'x}$ и интегрируя по x, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik'x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{i(k-k')x}\, dk\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, dk \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, 2\pi\delta(k-k')\, dk = 2\pi c(k').$$

Следовательно, имеем

$$c(k') = \frac{1}{2\pi} \int f(x)\, e^{-ik'x}\, dx. \tag{III, 10}$$

Аналогичные соотношения возникают и в более сложных случаях. Формулу (III, 5) можно рассматривать, как разложение δ-функции в интеграл Фурье.

Рассмотрим теперь разложение δ-функции по полиномам Лежандра:

$$\delta(1-\zeta) = \sum_l B_l P_l(\zeta).$$

Коэффициенты B_l найдем, умножая левую и правую части равенства на $P_{l'}(\zeta)$ и интегрируя по ζ. Учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}(\zeta)\, P_l(\zeta)\, d\zeta = \frac{2}{2l+1}\, \delta_{ll'}$$

и

$$P_l(1)=1,$$

получаем

$$B_l=\frac{1}{2}(2l+1).$$

Окончательно имеем

$$\delta(1-\zeta)=\frac{1}{2}\sum_l (2l+1)P_l(\zeta). \qquad \text{(III, 11)}$$

Докажем, наконец, следующее соотношение:

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}), \qquad \text{(III, 12)}$$

где

$$\delta(\boldsymbol{r})=\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z).$$

Для этого разложим функцию $\frac{1}{r}$ в трехмерный интеграл Фурье:

$$\frac{1}{r}=\int c(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,dk_x\,dk_y\,dk_z. \qquad \text{(III, 13)}$$

Соответственно для функции $c(\boldsymbol{k})\equiv c(k_x,\,k_y,\,k_z)$ имеем, пользуясь (III, 10),

$$c(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{r}\,e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,dV. \qquad \text{(III, 14)}$$

В формуле (III, 14) интегрируем сначала по углу, выбирая полярную ось в направлении вектора $\boldsymbol{k}$:

$$c(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty\frac{1}{r}\,r^2\,dr\int\limits_0^\pi e^{-ikr\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{i}{k}\int\limits_0^\infty\left(e^{-ikr}-e^{ikr}\right)dr.$$

Последний интеграл берется обычно добавлением в подынтегральное выражение множителя $e^{-\alpha r}$ и последующим устремлением в полученном результате α к нулю ($\alpha\to 0$). Окончательно получим

$$c(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{k^2}.$$

Подставляя $c(\boldsymbol{k})$ в (III, 13), имеем

$$\frac{1}{r}=\frac{2}{(2\pi)^2}\int\frac{1}{k^2}\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{k}.$$

Беря лапласиан от левой и правой частей, получим

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{k}$$

и, следовательно (см. III, 5),

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} (2\pi)^3 \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \qquad \text{(III, 15)}$$

В заключение отметим, что, как следует из (III, 1), δ-функция является размерной функцией, причем ее размерность обратна размерности ее аргумента.

Важная знаковая функция $\operatorname{sgn} x$ определена как

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \qquad \text{(III, 16)}$$

Ее фурье-образ

$$F_{\operatorname{sgn}}(\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x e^{-\alpha|x|} e^{i\omega x}\, dx =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{i}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + \alpha^2} = P\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(III, 17)}$$

где P означает главное значение функции $\frac{1}{x}$;

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad \text{(III, 18)}$$

$$\int f(x)\, P\left(\frac{1}{x}\right) dx = ⨍ \frac{f(x)}{x}\, dx, \qquad \text{(III, 19)}$$

где $⨍$ — главное значение интеграла.

Обратное преобразование дает интегральное представление знаковой функции

$$\operatorname{sgn} x = \frac{i}{\pi} ⨍_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\omega}\, d\omega. \qquad \text{(III, 20)}$$