ПРИЛОЖЕНИЕ IV

1. Вычисление некоторых интегралов

1) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ (интеграл Пуассона),

$$I = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Имеем тождество

$$I^2 = \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-(u^2+t^2)} dt$$

Вводя полярные координаты

$$r^2 = u^2 + t^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{u}{t},$$

$$dt\, du = r\, dr\, d\varphi,$$

имеем

$$I^2 = \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi = \frac{\pi}{\alpha},$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

2) $$I_{2n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\, dx.$$

Дифференцируя I по параметру α, находим

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}},$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^4\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}},$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}.$$

3) $I_{2n+1} = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1}\,dx,$

$$I_0 = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x\,dx = \frac{1}{2\alpha}.$$

Дифференцируя I_1 по параметру α, получаем

$$I_{2n+1} = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1}\,dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}.$$

4) $\int_{0}^{\infty} \ln(1-e^{-x})\,dx = x\ln(1-e^{-x})\Big|_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1} = -\int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1}.$

Аналогично

$$\int_{0}^{\infty} x^2\ln(1-e^{-x})\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(1-e^{-x})\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = -\frac{1}{3}\int_{0}^{\infty} \frac{x^3\,dx}{e^x-1}.$$

Вычисление последних интегралов производится с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд:

$$\frac{1}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x},$$

откуда следует

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^3e^{-(n+1)x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{6}{(n+1)^4} = \frac{6\cdot\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

$$5)\ I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{e^{-x}+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2e^{-x}\,dx}{(e^{-x}+1)^2} = 2\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x}\,dx}{(e^{-x}+1)^2}.$$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд, имеем

$$I = 2\int_0^\infty x^2(e^{-x}-2e^{-2x}+3e^{-3x}-\ \ldots)\,dx =$$

$$= 4\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ \ldots\right) = 4\cdot\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3}.$$

II. Формула Стирлинга

При больших значениях числа N имеет место формула Стирлинга:

$$N! \approx N^Ne^{-N}(2\pi N)^{\frac{1}{2}}.$$

С точностью до множителя $\sqrt{2\pi}$ она получается из простого вычисления. Именно,

$$\ln N! = \sum_{n=1}^{N} \ln n,$$

и далее, по формуле Эйлера — Маклорена,

$$\sum_{n=1}^{N} \ln n \approx \int_1^N \ln x\,dx + \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^N + C = N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + C.$$

Более точное вычисление приводит к значению $C = \sqrt{2\pi}$.