§ 4. Соотношения неопределенности и связь квантовой механики с классической

Мы воспользуемся представлением волновой функции в виде волнового пакета для обсуждения весьма важного, принципиального вопроса. Речь идет о том, в какой мере и с какой степенью точности можно пользоваться понятиями классической механики в применении к микрочастицам. Мы ограничимся здесь рассмотрением понятий импульса и положения частицы в пространстве. В § 24 этот вопрос будет исследован в полной мере.

Мы видели в § 35 ч. I, что волновой пакет обладает пространственной протяженностью, даваемой формулой (35,7) ч. I. В применении к интересующему нас здесь волновому пакету (3,9) эту формулу можно записать в виде

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar.$$

Поскольку имеет место расплывание пакета, не учтенное при выводе этой формулы, ее правильно представить как

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar. \tag{4,1}$$

Числовой множитель в формуле (4,1) будет уточнен в § 24. Аналогичным образом можно написать соотношения для двух других координат и компонент импульса:

$$\Delta p_y \Delta y \gtrsim \hbar, \tag{4,2}$$

$$\Delta p_z \Delta z \gtrsim \hbar. \tag{4,3}$$

Формулы (4,1) — (4,3) носят названия соотношений неопределенности Гейзенберга. Обсудим смысл этих неравенств, исходя из вероятностной трактовки волновой функции. Если ширина волнового пакета равна Δx, то согласно сказанному в предыдущем параграфе измерения координаты электрона покажут, что с подавляюще большой вероятностью он будет обнаружен в области пространства Δx. В этом смысле можно говорить, что координата электрона определена с точностью до величины Δx. При этом, однако, электрон, находящийся в области Δx, не описывается плоской волной и не имеет определенного значения импульса. Для образования волнового пакета шириной Δx необходимо было создать суперпозицию плоских волн с импульсами в интервале $p_0 - \Delta p_x \leqslant p_x \leqslant p_0 + \Delta p_x$, где Δp_x определено по формуле (4,1). Это означает, что измерения импульса электрона, локализованного в области Δx, будут приводить к значениям импульса, лежащим в указанном интервале. Иными словами, неопределенность в значении координаты электрона Δx (локализованного в области Δx) и неопределенность в значении его импульса Δp_x связаны соотношением (4, 1). Чем меньше ширина пакета Δx, тем больше Δp_x. Напротив, если задан интервал импульсов Δp_x, то формула (4,1) показывает, что частица с подавляюще большой вероятностью будет обнаружена в области пространства размером $\Delta x \geqslant \frac{\hbar}{\Delta p_x}$.

Из неравенства (4,1) следует, что величины Δx и Δp_x не могут быть равны нулю одновременно. Это означает, что координата x и сопряженный с ней импульс p_x не могут одновременно иметь вполне определенные значения. Таким образом, классические понятия пространственного положения и величины импульса применимы к микрочастице в определенных пределах, даваемых соотношениями Гейзенберга. Всякая попытка одновременно применить к микрочастице понятия импульса и координаты с большей точностью, вне рамок соотношений неопределенности, не имеет смысла. Это обстоятельство связано с самой природой микрочастиц, с их корпускулярно-волновыми свойствами.

В этой связи нужно предостеречь от ошибки, допускаемой некоторыми авторами, которые полагают, что соотношения неопределенности Гейзенберга дают ту степень точности, с которой могут быть определены координаты и импульс микрочастицы в рамках квантовой механики. По их мнению, для более точного одновременного определения координат и импульсов необходимо дальнейшее развитие теории.

В действительности это не так. Микрочастица является совершенно новым, отнюдь не классическим, объектом со своими характерными свойствами и законами движения. Как мы уже указывали, отличительной особенностью микрочастиц является обнаруживаемый ими дуализм волновых и корпускулярных свойств. Из дифракционных опытов вытекает, что частица не имеет траектории. Поэтому описывать ее движение, задавая точное значение координаты и импульса в каждый момент времени, как это делается в классической механике, невозможно. Однако можно указать с некоторой степенью точности величину той области пространства, в которой частица с подавляюще большой вероятностью будет обнаружена, и интервал тех значений импульса, которым она при этом обладает. Значение этих величин дается соотношениями неопределенности Гейзенберга.

Заметим, что когда частица имеет вполне определенное значение импульса $\Delta p_x = 0$, то согласно (4,1) ее положение совершенно неопределенно, т. е. $\Delta x \to \infty$. Действительно, состояние с определенным импульсом описывается плоской волной де Бройля. Для такой волны квадрат модуля $|\psi_p|^2$ постоянен, т. е. частица с одинаковой вероятностью может быть обнаружена в любой точке пространства.

С другой стороны, если задано вполне определенное положение частицы в данный момент времени, то ее импульс совершенно неопределен. Может показаться, что полученное соотношение находится в противоречии с фактом существования отчетливых треков частиц в камере Вильсона или на фотопластинке. Однако это противоречие только кажущееся. Действительно, след электрона в камере Вильсона представляет капельки жидкости, образовавшиеся на созданных им ионах. Размер капелек дает степень точности, с которой может быть фиксирована координата частицы. Поскольку размеры капелек порядка 10^{-4} *см*, неопределенность в координате электрона также имеет порядок 10^{-4} *см*. Следовательно, неопределенность соответствующей компоненты импульса $\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim 10^{-23}$ *г · см/сек*. Так как масса электрона равна $\sim 10^{-27}$ *г*, то неопределенность в составляющей скорости, направленной перпендикулярно к треку, будет равна $\Delta v_x = \frac{1}{m} \Delta p_x = 10^4$ *см/сек*.

Но следы в камере Вильсона оставляют лишь достаточно быстрые электроны, имеющие скорость v порядка $\gtrsim 10^9$ *см/сек*. Мы видим, следовательно, что в указанных условиях $\Delta v_x \ll v$ и приближенно можно говорить о движении частицы вдоль некоторой траектории в камере Вильсона.

Соотношение неопределенности Гейзенберга, записанное в виде

$$\Delta v_x \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{m}, \qquad (4,4)$$

показывает, что понятия классической физики оказываются применимыми с тем большей степенью точности, чем больше масса частицы. Ввиду малости квантовой постоянной $\hbar$, неопределенность в значениях координаты и скорости становится пренебрежимо малой у частиц макроскопически малого, но еще не атомного размера.

Пусть, например, мы имеем тело размером около 1 микрона с массой всего 10^{-10} *г*. Тогда (4,4) дает

$$\Delta v_x \Delta x \sim 10^{-17} \text{ см}^2/\text{сек}.$$

Если, например, положение тела определено с точностью 10^{-6} *см* (1/100 его размеров), то

$$\Delta v_x \sim 10^{-11} \text{ см/сек}.$$

Скорость броуновского движения частицы с массой 10^{-10} *г* составляет $\sim 10^{-4}$ *см/сек*. Мы видим, что погрешность в скорости, связанная с соотношением неопределенности, пренебрежимо мала уже у такого небольшого тела. Тем более она не играет роли у макроскопических тел.

Приведенные оценки являются иллюстрацией общего важного положения квантовой механики, именуемого принципом соответствия: при переходе к пределу $\hbar \to 0$, т. е. в предположении, что эффектами, пропорциональными квантовой постоянной $\hbar$, можно пренебречь, законы и соотношения квантовой механики переходят в соответствующие законы и соотношения классической механики. (Более подробно о переходе к классической механике см. гл. V.) В частности, у частиц с большой массой отношение $\hbar/m$ столь мало, что практически ее координата и скорость имеют определенные значения. Такая частица обладает траекторией, по которой она движется в соответствии с законами классической механики. Важность принципа соответствия заключается в том, что он служит методом отыскания квантовомеханических аналогов классических величин. Квантовая механика содержит в себе классическую механику как некоторый предельный случай, отвечающий $\hbar \to 0$ (другие условия этого перехода см. в гл. V). Благодаря принципу соответствия возможно установить связь между некоторыми квантовомеханическими величинами и понятиями классической механики.

Наряду с приведенным нами рассуждением, соотношения неопределенности часто получаются из обсуждения возможной степени точности определения координаты и импульса микрочастицы в различных принципиально возможных экспериментах. Мы не будем останавливаться на разборе этих примеров, поскольку в § 24 будет дан строгий вывод соотношений неопределенности.

Заметим, что если задана область возможного движения микрочастицы, например, размер l атома или ядра, то соотношения неопределенности позволяют качественно оценить значения ее импульса и энергии. Действительно, абсолютная величина импульса того же порядка, что и его неопределенность $\Delta p \sim \frac{\hbar}{l}$. Следовательно, $p \gtrsim \frac{\hbar}{l}$, а энергия частицы

$$E = \frac{p^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{2ml^2}. \tag{4,5}$$

Мы видим, что с уменьшением области локализации энергия возрастает. Например, для электрона в атоме l порядка размеров атома, т. е. порядка 10^{-8} *см*. Подставляя это значение в (4,5), находим, что энергия электрона в атоме $E \gtrsim 10$ *эв*. Полученное значение дает правильный порядок величины.

Рассмотрим далее нуклон (протон или нейтрон), находящийся в ядре. Размеры ядра порядка 10^{-12} *см*. Полагая $l \sim 10^{-12}$ *см* и учитывая, что масса нуклона $m \sim 10^{-24}$ *г*, находим для энергии E оценку, $E \gtrsim 1$ *Мэв*. Эта оценка также соответствует опытным данным.