чает, что квантовый осциллятор никогда не может находиться в состоянии абсолютного покоя. Это обстоятельство в свою очередь связано с соотношением неопределенности. По порядку величины энергия осциллятора равна

$$E \geqslant \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2 \geqslant \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{\hbar}{\Delta p}\right)^2.$$

Рассматривая эту величину как функцию Δp, легко установить, что она минимальна при $\Delta p \sim (m\omega\hbar)^{1/2}$ и по порядку

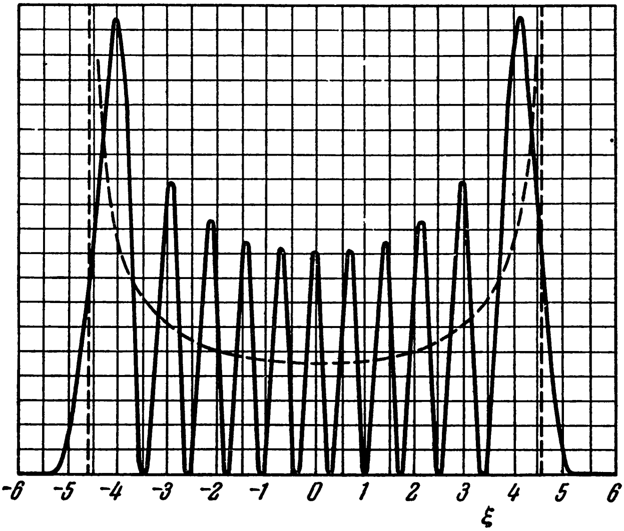

Рис. 5.

величины равна $\hbar\omega$. Экспериментально нулевая энергия E_0 наблюдается при рассеянии света кристаллом, находящимся при температуре, близкой к абсолютному нулю. При абсолютном нуле кристалл находится в основном (низшем) энергетическом состоянии. Тем не менее атомы совершают нулевые колебания, которые вызывают рассеяние света.

§ 11. Трехмерный осциллятор

Рассмотрим теперь движение пространственного трехмерного осциллятора. Для общности будем считать, что в трех взаимно перпендикулярных направлениях собственные частоты различны и равны соответственно ω_1, ω_2, ω_3. Тогда потенциальная энергия выражается формулой

$$U=\frac{m\omega_1^2}{2}x^2+\frac{m\omega_2^2}{2}y^2+\frac{m\omega_3^2}{2}z^2. \tag{11,1}$$

Уравнение Шредингера соответственно имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+\frac{m}{2}\left(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2\right)\psi=E\psi. \tag{11,2}$$

Будем пытаться искать решение уравнения (11,2) в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной координаты

$$\psi(x,\ y,\ z)=\psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z). \tag{11,3}$$

Подставляя (11,3) в (11,2), и разделяя переменные, получаем:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_i}{dx_i^2}+\frac{m\omega_i^2x_i^2}{2}\psi_i(x_i)=E_i\psi_i(x_i),\quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{11,4}$$

где $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$; $E_1+E_2+E_3=E$.

Таким образом, задача свелась к одномерной. В соответствии с этим, используя (10,13), (10,14) и (10,18), можем написать:

$$\psi_{n_1n_2n_3}(x_1,\ x_2,\ x_3)=$$

$$=\left(\frac{m^3\omega_1\omega_2\omega_3}{\hbar^3\pi^3}\right)^{1/4}\left(\frac{2^{-(n_1+n_2+n_3)}}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\right)^{1/2}e^{-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{2}}H_{n_1}(\xi_1)\,H_{n_2}(\xi_2)\,H_{n_3}(\xi_3), \tag{11,5}$$

где $\xi_i=\sqrt{\frac{m\omega_i}{\hbar}}\,x_i\quad (i=1,\ 2,\ 3).$

Полная энергия осциллятора равна

$$E=\hbar\omega_1\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_2\left(n_2+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_3\left(n_3+\frac{1}{2}\right). \tag{11,6}$$

В частности, для изотропного осциллятора, у которого $\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega$, полная энергия имеет вид

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right),\quad\text{где}\quad n=n_1+n_2+n_3, \tag{11,7}$$

т. е. E_n зависит от суммы квантовых чисел n_1, n_2, n_3. Это значит, что данное значение энергии (данное n) можно получить за счет различных комбинаций n_1, n_2, n_3. Отсюда следует, что все уровни энергии, за исключением основного $n=0$, являются вырожденными. Нетрудно подсчитать кратность вырождения. Для этого фиксируем, кроме n, еще квантовое число n_1. Тогда число возможных троек чисел n_1, n_2, n_3 будет равно числу возможных значений n_2, т. е. равно $n-n_1+1$, так как n_2 может меняться от нуля до $n - n_1$. Суммируя полученное выражение по всем возможным значениям числа n_1, найдем полное число комбинаций из трех квантовых чисел n_1, n_2, n_3, дающих в сумме заданное число n, т. е. кратность вырождения n-го уровня энергии:

$$\sum_{n_1=0}^{n} (n - n_1 + 1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (11,8)$$

§ 12. Отражение и прохождение через потенциальный барьер

Из других сравнительно простых задач квантовой механики остановимся на движении частиц в поле сил, которое может быть представлено в виде потенциального барьера. Это означает, что силы действуют на частицу в некоторой ограниченной области пространства. Вне этой области частица движется как свободная. Мы увидим, что изучение движения частиц в поле, имеющем вид барьера простейшей формы, позволит выявить ряд важных и принципиально новых свойств квантовых частиц. Начнем наше рассмотрение с простейшего прямоугольного бесконечно протяженного одномерного потенциального барьера, изображенного на рис. 6. В классической механике всякая частица, двигающаяся слева направо с энергией, меньшей высоты барьера U_0, полностью отражается от потенциальной стенки. Область $x > 0$ является для нее недоступной, так как в этой области полная энергия частицы была бы меньше потенциальной. Это означало бы, что кинетическая энергия должна была бы быть отрицательной, что, очевидно, невозможно. Если же, напротив, E больше U_0, то по законам классической механики частица беспрепятственно проходит над барьером, двигаясь в области $x > 0$ с меньшей кинетической энергией, равной $E - U_0$.

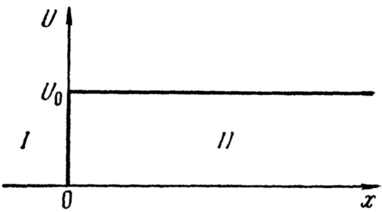

Рис. 6.

Рассмотрим теперь движение частицы в тех же условиях по законам квантовой механики. Для этого напишем уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы в поле бесконечно протяженного барьера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi, \qquad (12,1)$$

где U — потенциальная энергия, график которой изображен на рис. 6. Решения уравнения (12, 1) удобно рассмотреть в двух