Мы видим, что полученное выражение отличается от результата, даваемого формулой (23,7), наличием двойной суммы, которая выражает своеобразную интерференцию между состояниями. В случае «смешанных» состояний такая интерференция отсутствует.

Все приведенные рассуждения непосредственно обобщаются и на случай сплошного спектра.

§ 24. Неравенства Гейзенберга

Мы выяснили в предыдущем параграфе условия, при которых возможно одновременное измерение двух физических величин. Предположим теперь, что две физические величины F и R одновременно не имеют определенных значений. Тогда операторы, отвечающие этим величинам $\hat{F}$ и $\hat{R}$, не коммутируют между собой. Предположим, что имеет место соотношение

$$\hat{F}\hat{R}-\hat{R}\hat{F}=i\hat{B}, \tag{24,1}$$

где $\hat{B}$, как это следует из (17,4), некоторый эрмитов оператор.

Представляет интерес определить в общем виде, каково минимально возможное значение произведения флуктуаций данных величин. За меру, характеризующую отклонения отдельных результатов измерения величин F и R от их средних значений, выберем среднеквадратичные отклонения (дисперсии) $\overline{\Delta F^2}$ и $\overline{\Delta R^2}$, где

$$\Delta F=F-\overline{F}, \quad \Delta R=R-\overline{R}.$$

Для среднеквадратичных отклонений соответственно имеем

$$\begin{aligned}\overline{\Delta F^2}&=\overline{(F-\overline{F})^2}=\overline{F^2}-\overline{F}^2,\\ \overline{\Delta R^2}&=\overline{(R-\overline{R})^2}=\overline{R^2}-\overline{R}^2.\end{aligned} \tag{24,2}$$

Не ограничивая общности, мы можем положить $\overline{F}=0$ и $\overline{R}=0$ (иными словами, понимать под F и R отклонение этих величин от их среднего значения).

Рассмотрим интеграл

$$J(\alpha)=\int|(\alpha\hat{F}-i\hat{R})\psi|^2\,dV. \tag{24,3}$$

Здесь ψ — волновая функция, интегрирование производится по всей области изменения независимых переменных, а α — произвольный вещественный параметр. Интеграл (24,3) является не отрицательным $J(\alpha)\geqslant 0$. Перепишем его в виде

$$J(\alpha)=\int(\alpha\hat{F}-i\hat{R})\psi\cdot(\alpha\hat{F}^*+i\hat{R}^*)\psi^*\,dV.$$

Воспользовавшись самосопряженностью операторов $\hat{F}$ и $\hat{R}$, получаем

$$J(\alpha) = \int \psi^* (\alpha\hat{F} + i\hat{R})(\alpha\hat{F} - i\hat{R})\psi\, dV =$$
$$= \int \psi^* (\alpha^2\hat{F}^2 - \alpha i(\hat{F}\hat{R} - \hat{R}\hat{F}) + \hat{R}^2)\psi\, dV.$$

Учитывая (24,1) и используя выражение (22,4) для среднего значения, имеем

$$J(\alpha) = \alpha^2\overline{F^2} + \alpha\overline{B} + \overline{R^2} = \alpha^2\,\overline{\Delta F^2} + \alpha\overline{B} + \overline{\Delta R^2}.$$

Условие того, что этот квадратичный по α трехчлен не отрицателен, запишется в виде

$$4\,\overline{\Delta F^2}\,\overline{\Delta R^2} \geqslant \overline{B}^2 \tag{24,4}$$

или

$$\sqrt{\overline{\Delta F^2}\,\overline{\Delta R^2}} \geqslant \frac{1}{2}\,|\,\overline{B}\,|. \tag{24,5}$$

Формула (24,5) дает искомое соотношение между погрешностями ΔF и ΔR. Она устанавливает минимально возможное значение произведения этих погрешностей.

Рассмотрим частный случай, взяв за величины F и R соответственно p_x и x. Тогда из (20,3) и (20,4) следует $\hat{B} = -\hbar$, и мы имеем:

$$\sqrt{\overline{\Delta p_x^2}}\,\sqrt{\overline{\Delta x^2}} \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{24,6}$$

Таким образом, соотношение неопределенности (24,5) имеет вполне общий характер. Соотношение неопределенности для координаты и импульса является частным случаем соотношения (24,5).

Все сопряженные квантовомеханические величины не могут быть измерены одновременно. Минимальные неточности в их значениях при одновременном измерении связаны с величиной $\overline{B}$. Наоборот, коммутирующие между собой квантовомеханические величины, для которых $\hat{B} = 0$, могут быть измерены одновременно с произвольной степенью точности.

§ 25. Скобки Пуассона

Мы рассмотрели в § 20 один из возможных методов нахождения операторов, изображающих те или иные физические величины. Более последовательно этот вопрос был рассмотрен Дираком. Дирак предположил, что в квантовой механике, так же, как и в классической, можно ввести понятие скобок Пуас-