Воспользовавшись самосопряженностью операторов $\hat{F}$ и $\hat{R}$, получаем

$$J(\alpha) = \int \psi^* (\alpha\hat{F} + i\hat{R})(\alpha\hat{F} - i\hat{R})\psi\, dV =$$
$$= \int \psi^* (\alpha^2\hat{F}^2 - \alpha i(\hat{F}\hat{R} - \hat{R}\hat{F}) + \hat{R}^2)\psi\, dV.$$

Учитывая (24,1) и используя выражение (22,4) для среднего значения, имеем

$$J(\alpha) = \alpha^2\overline{F^2} + \alpha\overline{B} + \overline{R^2} = \alpha^2\,\overline{\Delta F^2} + \alpha\overline{B} + \overline{\Delta R^2}.$$

Условие того, что этот квадратичный по α трехчлен не отрицателен, запишется в виде

$$4\,\overline{\Delta F^2}\,\overline{\Delta R^2} \geqslant \overline{B}^2 \tag{24,4}$$

или

$$\sqrt{\overline{\Delta F^2}\,\overline{\Delta R^2}} \geqslant \frac{1}{2}\,|\,\overline{B}\,|. \tag{24,5}$$

Формула (24,5) дает искомое соотношение между погрешностями ΔF и ΔR. Она устанавливает минимально возможное значение произведения этих погрешностей.

Рассмотрим частный случай, взяв за величины F и R соответственно p_x и x. Тогда из (20,3) и (20,4) следует $\hat{B} = -\hbar$, и мы имеем:

$$\sqrt{\overline{\Delta p_x^2}}\,\sqrt{\overline{\Delta x^2}} \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{24,6}$$

Таким образом, соотношение неопределенности (24,5) имеет вполне общий характер. Соотношение неопределенности для координаты и импульса является частным случаем соотношения (24,5).

Все сопряженные квантовомеханические величины не могут быть измерены одновременно. Минимальные неточности в их значениях при одновременном измерении связаны с величиной $\overline{B}$. Наоборот, коммутирующие между собой квантовомеханические величины, для которых $\hat{B} = 0$, могут быть измерены одновременно с произвольной степенью точности.

§ 25. Скобки Пуассона

Мы рассмотрели в § 20 один из возможных методов нахождения операторов, изображающих те или иные физические величины. Более последовательно этот вопрос был рассмотрен Дираком. Дирак предположил, что в квантовой механике, так же, как и в классической, можно ввести понятие скобок Пуассона[1]). Так, если двум классическим величинам F, R отвечает скобка Пуассона,

$$[F, R] = -\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial R}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial R}{\partial p_i}\right),$$

то изображающим эти величины операторам $\hat{F}$, $\hat{R}$ отвечает квантовая скобка Пуассона $[\hat{F}, \hat{R}]$. Далее предполагалось, что свойства квантовых скобок Пуассона в точности соответствуют свойствам классических скобок Пуассона с тем лишь условием, что для квантовых скобок существен порядок сомножителей. Выпишем свойства скобок Пуассона:

$$[\hat{F}, \hat{R}] = -[\hat{R}, \hat{F}], \tag{25,1}$$

$$[\hat{F}, C] = 0, \tag{25,2}$$

где C — число.

$$[\hat{F}_1 + \hat{F}_2, \hat{R}] = [\hat{F}_1, \hat{R}] + [\hat{F}_2, \hat{R}], \tag{25,3}$$

$$[\hat{F}, \hat{R}_1 + \hat{R}_2] = [\hat{F}, \hat{R}_1] + [\hat{F}, \hat{R}_2], \tag{25,4}$$

$$[\hat{F}_1\hat{F}_2, \hat{R}] = [\hat{F}_1, \hat{R}]\hat{F}_2 + \hat{F}_1[\hat{F}_2, \hat{R}], \tag{25,5}$$

$$[\hat{F}, \hat{R}_1\hat{R}_2] = [\hat{F}, \hat{R}_1]\hat{R}_2 + \hat{R}_1[\hat{F}, \hat{R}_2], \tag{25,6}$$

$$[\hat{F}_1, [\hat{F}_2, \hat{F}_3]] + [\hat{F}_3, [\hat{F}_1, \hat{F}_2]] + [\hat{F}_2[\hat{F}_3, \hat{F}_1]] = 0. \tag{25,7}$$

Выбор скобок Пуассона как основы для построения системы квантовомеханических операторов связан с тем, что они, как мы увидим, непосредственно выражаются через коммутаторы соответствующих операторов. Последняя комбинация операторов является основой для их физического толкования.

Рассмотрим скобку Пуассона $[\hat{F}_1\hat{F}_2, \hat{R}_1\hat{R}_2]$, для вычисления которой можно воспользоваться выражениями (25,5) и (25,6). Соответственно получим:

$$[\hat{F}_1\hat{F}_2, \hat{R}_1\hat{R}_2] = [\hat{F}_1, \hat{R}_1\hat{R}_2]\hat{F}_2 + \hat{F}_1[\hat{F}_2, \hat{R}_1\hat{R}_2] =$$
$$= [\hat{F}_1, \hat{R}_1]\hat{R}_2\hat{F}_2 + \hat{R}_1[\hat{F}_1, \hat{R}_2]\hat{F}_2 + \hat{F}_1[\hat{F}_2, \hat{R}_1]\hat{R}_2 + \hat{F}_1\hat{R}_1[\hat{F}_2, \hat{R}_2]$$

и

$$[\hat{F}_1\hat{F}_2, \hat{R}_1\hat{R}_2] = [\hat{F}_1\hat{F}_2, \hat{R}_1]\hat{R}_2 + \hat{R}_1[\hat{F}_1\hat{F}_2, \hat{R}_2] =$$
$$= \hat{F}_1[\hat{F}_2, \hat{R}_1]\hat{R}_2 + [\hat{F}_1, \hat{R}_1]\hat{F}_2\hat{R}_2 + \hat{R}_1\hat{F}_1[\hat{F}_2, \hat{R}_2] + \hat{R}_1[\hat{F}_1, \hat{R}_2]\hat{F}_2.$$

---

[1]) О скобках Пуассона в классической механике см. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, стр. 169; Г. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, 1957, стр. 274.

Приравнивая оба полученных результата, находим

$$(\hat{F}_1\hat{R}_1 - \hat{R}_1\hat{F}_1)[\hat{F}_2,\ \hat{R}_2] = [\hat{F}_1,\ \hat{R}_1](\hat{F}_2\hat{R}_2 - \hat{R}_2\hat{F}_2).$$

Поскольку последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, имеем:

$$[\hat{F}_1,\ \hat{R}_1] = iC(\hat{F}_1\hat{R}_1 - \hat{R}_1\hat{F}_1),$$
$$[\hat{F}_2,\ \hat{R}_2] = iC(\hat{F}_2\hat{R}_2 - \hat{R}_2\hat{F}_2),$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

Вещественность C следует из того, что скобка Пуассона двух действительных переменных также должна быть вещественной. Так, если $\hat{F}^+ = \hat{F}$, $\hat{R}^+ = \hat{R}$, то должно быть $[\hat{F}, \hat{R}]^+ = [\hat{F}, \hat{R}]$. Однако

$$[\hat{F},\ \hat{R}]^+ = -iC^*(\hat{F}\hat{R} - \hat{R}\hat{F})^+ = -iC^*(\hat{R}\hat{F} - \hat{F}\hat{R}) = \frac{C^*}{C}[\hat{F},\ \hat{R}]$$

и поэтому $C^* = C$. Из классической теории скобок Пуассона следует, что постоянная C имеет размерность 1/*эрг сек*. Ее числовое значение может быть определено только путем сравнения выводов теории с опытными данными. Оно оказалось равным $\frac{1}{\hbar}$. Окончательно имеем

$$(\hat{F}\hat{R} - \hat{R}\hat{F}) = \frac{\hbar}{i}[\hat{F},\ \hat{R}]. \tag{25,8}$$

При переходе к классической механике[1]), т. е. при $\hbar \to 0$ коммутатор $\{\hat{F}\hat{R}\}$, как это и следовало ожидать, обращается в нуль. Естественно допустить, что, хотя бы в простейших случаях, сами квантовые скобки Пуассона имеют те же значения, что и классические скобки. Для канонически сопряженных переменных координат и импульсов в классической механике имеем

$$[p_i,\ p_k] = 0,$$
$$[x_i,\ x_k] = 0,$$
$$[p_i,\ x_k] = \delta_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{25,9}$$

Здесь и в дальнейшем мы используем такие обозначения:

$$x_1 = x, \qquad p_1 = p_x,$$
$$x_2 = y, \qquad p_2 = p_y,$$
$$x_3 = z, \qquad p_3 = p_z.$$

Такие же выражения можно написать для квантовых операторов координаты и проекции импульса. Поэтому коммутаторы

[1]) Подробнее см. гл. V.

соответствующих величин приобретают вид:

$$\hat{x}_i\hat{x}_k - \hat{x}_k\hat{x}_i = 0,$$
$$\hat{p}_i\hat{p}_k - \hat{p}_k\hat{p}_i = 0,$$
$$\hat{p}_i\hat{x}_k - \hat{x}_k\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \qquad (25,10)$$

Мы воспользуемся этими равенствами для определения операторов координаты и импульса.

§ 26. Операторы и собственные функции координаты и импульса

Начнем с установления вида операторов в координатном представлении[1]). В этом представлении волновая функция, характеризующая состояние частицы, зависит от ее координат $\psi(x, y, z)$. Координаты x, y, z являются независимыми переменными. Поэтому отвечающие им операторы, в соответствии с выводами § 20 и § 22, сводятся к умножению на эти координаты

$$\hat{x}_i = x_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (26,1)$$

Перестановочные соотношения (25,10) перепишем в виде

$$(\hat{p}_k x_k - x_k\hat{p}_k)\psi = \frac{\hbar}{i}\psi \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \qquad (26,2)$$
$$(\hat{p}_i x_k - x_k\hat{p}_i)\psi = 0 \qquad (i \neq k), \qquad (26,3)$$
$$(\hat{p}_i\hat{p}_k - \hat{p}_k\hat{p}_i)\psi = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \qquad (26,4)$$

Уравнениям (26,2)—(26,4) можно удовлетворить произвольной функцией ψ, положив

$$\hat{p}_k = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial\alpha(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}, \qquad (26,5)$$

где $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ — произвольная вещественная функция. Вещественность α требуется для эрмитовости оператора $\hat{p}_k$. Функцию α можно без ограничения общности результата положить равной нулю. Действительно, действие оператора (26,5) на произвольную функцию ψ переводит ее в функцию $\psi' = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}\psi$. С другой стороны, если мы подействуем на функцию $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha}\psi$ оператором $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$, то получим функцию $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha}\psi'$. Следовательно, переход от оператора (26,5) к оператору $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$

[1]) См. В. А. Фок, Начала квантовой механики, Кубуч, 1932, стр. 32.