другие не могут иметь никаких определенных значений, хотя бы и нулевых.

Покажем, наконец, что оператор момента количества движения связан с оператором бесконечно малого поворота системы вокруг начала координат. Действительно, повернем систему координат на малый угол $\delta\varphi$, например вокруг оси $z$. Старые и новые координаты точки связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= x + y\,\delta\varphi, & x &= x' - y'\,\delta\varphi, \\ y' &= -x\,\delta\varphi + y, & y &= x'\,\delta\varphi + y', \\ z' &= z, & z &= z'. \end{aligned}$$

Следовательно, при повороте волновая функция $\psi(x, y, z)$, выраженная через новые переменные, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \psi(x' - y'\,\delta\varphi,\ y' + x'\,\delta\varphi,\ z') = \\ &= \psi(x', y', z') - y'\,\delta\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x'} + x'\,\delta\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y'} = \\ &= \left[1 + \delta\varphi\left(x'\frac{\partial}{\partial y'} - y'\frac{\partial}{\partial x'}\right)\right]\psi(x', y', z') = \\ &= \left(1 + \frac{i}{\hbar}\,\delta\varphi\hat{l}_{z'}\right)\psi(x', y', z') = \hat{W}_{z'}\psi(x', y', z'). \end{aligned}$$

Оператор $\hat{W}$ естественно назвать оператором поворота. Мы нашли, что оператор $\hat{W}_z$ поворота на малый угол $\delta\varphi$ вокруг оси $z$ связан с оператором $\hat{l}_z$ соотношением

$$\hat{W}_z = 1 + \frac{i}{\hbar}\,\delta\varphi\hat{l}_z. \qquad (30{,}20)$$

Такая же связь, конечно, имеет место и для любой другой оси.

## § 31. Дифференцирование операторов по времени

Построим теперь оператор $\hat{\dot{F}}$, отвечающий производной по времени от квантовомеханической величины, описываемой оператором $\hat{F}$. Совершенно ясно, что обычное определение производной от функции неприменимо к квантовомеханической величине, описываемой оператором $\hat{F}$. Для определения понятия производной мы вновь воспользуемся аналогией с классической механикой. Как известно, в классической механике производная по времени от некоторой механической величины $F$ может быть выражена через классическую скобку Пуассона

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [H, F],$$

где $H$ — функция Гамильтона.

Переходя от классических величин к квантовомеханическим операторам и от классической скобки Пуассона к квантовой, получим выражение для оператора $\hat{\dot{F}}$

$$\hat{\dot{F}} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + [\hat{H},\ \hat{F}]. \tag{31,1}$$

Если оператор $\hat{F}$ не зависит от времени явно, то оператор $\hat{\dot{F}}$ имеет вид

$$\hat{\dot{F}} = [\hat{H},\ \hat{F}] = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}). \tag{31,2}$$

Из свойств квантовых скобок Пуассона сразу следуют выражения для производной от суммы $\hat{F}$ и произведения $\hat{L}$ двух операторов $\hat{D}$ и $\hat{R}$

$$\hat{\dot{F}} = \hat{\dot{D}} + \hat{\dot{R}}, \tag{31,3}$$

$$\hat{\dot{L}} = \hat{\dot{D}}\hat{R} + \hat{D}\hat{\dot{R}}.$$

С помощью формулы (31,1) для производной от квантового оператора можно найти выражение для производной по времени от среднего значения величины $F$.

Дифференцируя выражение (22, 4) для среднего, находим

$$\dot{\bar{F}} = \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{F}\psi\, dV + \int \psi^* \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \psi\, dV + \int \psi^* \hat{F} \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dV.$$

Выразим производные $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ и $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ через волновые функции с помощью уравнения Шредингера и уравнения с ним сопряженного. Тогда имеем

$$\dot{\bar{F}} = \int \psi^* \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \psi\, dV - \frac{i}{\hbar} \int \psi^* \hat{F}(\hat{H}\psi)\, dV + \frac{i}{\hbar} \int (\hat{H}^*\psi^*)\hat{F}\psi\, dV,$$

$$\int (\hat{H}^*\psi^*)\hat{F}\psi\, dV = \int (\hat{F}\psi)\hat{H}^*\psi^*\, dV,$$

так как интеграл не изменяется при перестановке подынтегральных функций.

Из эрмитовости оператора $\hat{H}$ следует, что

$$\int (\hat{F}\psi)\hat{H}^*\psi^*\, dV = \int \psi^* \hat{H}\hat{F}\psi\, dV.$$

Окончательно получаем

$$\dot{\bar{F}} = \int \psi^* \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H})\right)\psi\, dV. \tag{31,4}$$

Сравнивая полученное выражение с определением среднего от производной $\dot{F}$, мы приходим к важному равенству

$$\dot{\overline{F}} = \overline{\dot{F}}. \tag{31,5}$$

В виде примера определим операторы $\hat{\dot{x}}$ и $\hat{\dot{p}}_x$. Поскольку операторы координаты и импульса явно от времени не зависят, имеем

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= [\hat{H},\ \hat{x}], \\ \hat{\dot{p}}_x &= [\hat{H},\ \hat{p}_x]. \end{aligned} \tag{31,6}$$

В такой форме операторные уравнения (31,6) аналогичны классическим уравнениям Гамильтона. Раскроем коммутаторы, стоящие в правых частях равенств (31,6), предполагая при этом, что гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) + U(x,\ y,\ z,\ t).$$

Учитывая, что операторы координаты и импульса равны

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

получаем

$$[\hat{H},\ \hat{x}] = \frac{i}{2m\hbar}\left(\hat{p}_x^2 x - x\hat{p}_x^2\right),$$

поскольку $x$ и $U(x, y, z, t)$ коммутируют.

Вычисляя коммутатор операторов $\hat{p}_x^2$ и $x$, найдем

$$\hat{p}_x^2 x - x\hat{p}_x^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}x - x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = -\hbar^2\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial x^2}\right) =$$
$$= -2\hbar^2\frac{\partial}{\partial x} = -2i\hbar\hat{p}_x.$$

Окончательно получаем:

$$\hat{\dot{x}} = [\hat{H},\ \hat{x}] = \frac{1}{m}\hat{p}_x. \tag{31,7}$$

Мы видим, что оператор скорости $\hat{\dot{x}}$ связан с оператором импульса $p_x$ таким же соотношением, каким в классической механике связаны между собой эти величины. Найдем оператор $\hat{\dot{p}}_x$

$$[\hat{H},\ \hat{p}_x] = \frac{i}{\hbar}(U\hat{p}_x - \hat{p}_x U) = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Итак, имеем

$$\hat{\dot{p}}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{31,8}$$

Мы получили операторное уравнение движения в форме уравнения Ньютона. Уравнения (31,7), (31,8) можно написать также для средних значений соответствующих величин

$$\overline{\dot{x}} = \dot{\bar{x}} = \frac{1}{m}\bar{p}_x, \quad \overline{\dot{p}}_x = \dot{\bar{p}}_x = -\overline{\frac{\partial U}{\partial x}}. \tag{31,9}$$

Последние соотношения носят название теорем Эренфеста. Выражая $\dot{\bar{p}}_x$ через $\ddot{\bar{x}}$, находим

$$m\ddot{\bar{x}} = -\overline{\frac{\partial U}{\partial x}}. \tag{31,10}$$

В такой форме это уравнение очень близко по внешнему виду к уравнению Ньютона классической механики.

## § 32. Интегралы движения

Предположим, что оператор $\hat{F}$ не зависит от времени явно и коммутирует с оператором Гамильтона $\hat{H}$. В этом случае, согласно (31,2) оператор производной по времени равен нулю, и из соотношения (31,5) вытекает, что среднее значение величины $F$ не изменяется во времени

$$\dot{\bar{F}} = 0. \tag{32,1}$$

Постоянна во времени также вероятность того, что при измерении $F$ мы получим какое-то возможное значение $F_n$ этой величины. Действительно, эта вероятность дается квадратом модуля $|c_n(t)|^2$ коэффициента разложения волновой функции $\psi(x, t)$, описывающей состояние системы в момент времени $t$, по собственным функциям оператора $\hat{F}$. Поскольку, однако, оператор $\hat{F}$ коммутирует с оператором $\hat{H}$, оба оператора имеют общие собственные функции $\psi_n(x, t) = \psi_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$ (см. § 23). Разложение $\psi(x, t)$ по собственным функциям оператора $\hat{F}$ можно представить в виде

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(x) = \sum_n c_n(t)\,\psi_n(x). \tag{32,2}$$

Следовательно,

$$|c_n(t)|^2 = |c_n(0)|^2 = \text{const}.$$

Такие величины в квантовой механике, так же как и в механике классической, принято именовать интегралами движения. Из сказанного ясно, что квантовомеханическая величина является интегралом движения, если: