имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\alpha\hat{l}}\psi\right)=e^{i\alpha\hat{l}}\frac{\partial\psi}{\partial t},\qquad \hat{H}e^{i\alpha\hat{l}}\psi=e^{i\alpha\hat{l}}\hat{H}\psi$$

и уравнение (32,8) удовлетворяется непосредственно.

Рассмотрим некоторые простые примеры. Начнем со случая свободной частицы. Гамильтониан при этом будет иметь вид

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2\right).$$

Очевидно, что

$$[\hat{H},\ \hat{p}_x]=[\hat{H},\ \hat{p}_y]=[\hat{H},\ \hat{p}_z]=0.$$

Следовательно,

$$\dot{\hat{p}}_x=\dot{\hat{p}}_y=\dot{\hat{p}}_z=0. \tag{32,7}$$

Если свободная частица в какой-то начальный момент находилась в состоянии с заданным импульсом, то это значение импульса сохраняется во времени.

В качестве другого примера рассмотрим частицу, движущуюся в поле, создаваемом бесконечной однородной плоскостью (плоскость xy). Потенциальная энергия частицы в таком поле зависит только от расстояния до плоскости $U=U(|z|)$, так что гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U(|z|).$$

С таким гамильтонианом коммутируют операторы $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{l}_z$. Это означает, что при движении в поле однородной плоскости (xy) сохраняются компоненты импульса частицы p_x и p_y и z-я компонента момента количества движения l_z.

§ 33. Четность

Рассмотренные выше законы сохранения — закон сохранения энергии, импульса и момента количества движения являются квантовомеханическими аналогами законов сохранения классической механики. Оказывается, однако, что в квантовой механике существуют и законы сохранения, не имеющие классического аналога. Один из таких законов тесно связан со свойствами пространства и имеет весьма общий характер. Именно, гамильтониан замкнутой системы не должен изменяться при следующих преобразованиях координат:

1) трансляции начала координат на произвольный отрезок;
2) повороте на произвольный угол;
3) преобразовании инверсии в начале координат, т. е. замене $x_i \to -x_i$, при которой знаки всех координат изменяются на обратные.

С первыми двумя преобразованиями, как мы видели в предыдущем параграфе, были связаны закон сохранения импульса и момента количества движения. С преобразованием инверсии в квантовой механике оказывается связанным еще один общий закон сохранения. Подобно введенным ранее операторам переноса и поворота можно ввести и соответствующий оператор инверсии $\hat{I}$

$$\hat{I}\psi(\boldsymbol{r}, t) = a\psi(-\boldsymbol{r}, t), \tag{33,1}$$

где a — некоторая постоянная.

При двухкратном применении оператора инверсии $\hat{I}$ мы приходим к исходному состоянию. Отсюда следует, что $a^2 = 1$, т. е. $a = \pm 1$. Таким образом, вообще, выполняется условие

$$\hat{I}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \pm\,\psi(-\boldsymbol{r}, t), \tag{33,2}$$

т. е. при инверсии может менять знак непосредственно сама волновая функция, а не только аргумент $\boldsymbol{r}$, от которого она зависит. Свойство волновой функции преобразовываться при инверсии с $a = +1$ или $a = -1$ зависит от внутренних свойств частиц, описываемых этой волновой функцией.

О частицах, которые описываются волновыми функциями, удовлетворяющими условию

$$\hat{I}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(-\boldsymbol{r}, t),$$

говорят, что они обладают положительной внутренней четностью. Наоборот, частицы, которые описываются волновыми функциями, удовлетворяющими условию

$$\hat{I}\psi(\boldsymbol{r}, t) = -\psi(-\boldsymbol{r}, t),$$

имеют отрицательную внутреннюю четность.

Предположим, что гамильтониан замкнутой системы имеет вид

$$\hat{H} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i + \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} U_{ik}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k|).$$

Легко видеть, что этот гамильтониан не изменяется при замене $\boldsymbol{r}_i \to -\boldsymbol{r}_i$, т. е. он удовлетворяет условию

$$\hat{I}\hat{H}\psi = \hat{H}\hat{I}\psi.$$

Это означает, что оператор $\hat{I}$ коммутирует с гамильтонианом

$$\hat{I}\hat{H} = \hat{H}\hat{I}. \tag{33,3}$$

Определим собственные значения λ оператора инверсии

$$\hat{I}\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x). \tag{33,4}$$

Применим к этому уравнению оператор инверсии еще раз. Так как при двукратном отражении мы возвращаемся к исходному значению координат, то это преобразование является тождественным

$$\hat{I}^2\psi_\lambda = \psi_\lambda = \lambda\hat{I}\psi_\lambda = \lambda^2\psi_\lambda. \tag{33,5}$$

Отсюда получаем, что собственные значения λ равны ± 1. О состоянии, которому отвечает $\lambda = +1$, говорят, что оно имеет положительную четность или является четным. Наоборот, состояние с $\lambda = -1$ имеет отрицательную четность или является нечетным. Если оператор четности коммутирует с оператором Гамильтона, то имеет место закон сохранения четности. Закон сохранения четности, как и другие законы сохранения, накладывает определенные ограничения на возможные изменения состояний системы. Именно, если система была в четном состоянии, то она будет оставаться в этом состоянии, не переходя в нечетное состояние. Аналогично дело обстоит, естественно, и с системой, находящейся в нечетном состоянии.

Определим четность состояния частицы с моментом количества движения, равным l. То обстоятельство, что момент количества движения и четность могут быть определены одновременно, следует из коммутации соответствующих операторов:

$$\{\hat{I},\ l_x\} = 0;\quad \{\hat{I},\ l_y\} = 0;\quad \{\hat{I},\ l_z\} = 0;\quad \{\hat{I},\ \hat{l}^2\} = 0. \tag{33,6}$$

Из самих выражений для операторов момента $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$ ясно, что они не изменяются при преобразовании инверсии. В сферической системе координат преобразование инверсии имеет вид

$$r \to r;\quad \vartheta \to \pi - \vartheta;\quad \varphi \to \varphi + \pi. \tag{33,7}$$

Зависимость волновой функции частицы с определенным моментом l от углов ϑ, φ дается сферической функцией $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ (см. § 30). При преобразовании инверсии (33,7) имеем $\cos\vartheta \to -\cos\vartheta$ и $e^{im\varphi} \to (-1)^m e^{im\varphi}$. Как преобразуется присоединенный полином Лежандра $P_l^m(\xi)$ при изменении знака его аргумента, легко определить из формулы (30,17). Так как $P_l(-\xi) = (-1)^l P_l(\xi)$, то мы получаем, что $P_l^m(-\xi) = (-1)^{l+m} P_l^m(\xi)$. Учитывая также множитель $(-1)^m$, который дает функция $e^{im\varphi}$, находим, что при инверсии волновая функция в целом умножается на множитель $(-1)^l$. Принимая во внимание также множитель $a = \pm 1$, связанный с внутренними свойствами частиц, получаем:

$$\lambda = (-1)^l a. \tag{33,8}$$

Таким образом, состояния с четными l имеют положительную четность, если $a = 1$, и отрицательную, если $a = -1$. Состояния с нечетными l имеют соответственно отрицательную четность при $a = 1$ и положительную, если $a = -1$. Если мы имеем систему невзаимодействующих частиц, то четность системы определяется произведением четностей отдельных частиц. Действительно, в § 14 мы видели, что волновая функция системы невзаимодействующих частиц может быть записана в виде произведения волновых функций отдельных частиц. Но отсюда сразу следует, что при преобразовании инверсии четности, относящиеся к отдельным частицам, перемножаются. Если каждая из частиц находится в состоянии с определенным моментом количества движения (движение в центральном поле), то четность всей системы может быть записана в виде

$$\lambda = (-1)^{\Sigma l_k} \prod_k a_k, \tag{33,9}$$

где второй множитель определяется произведением внутренних четностей частиц.

Наряду с другими законами сохранения закон сохранения четности является одним из наиболее общих законов природы. Невозможность переходов замкнутой квантовомеханической системы из состояний с одной четностью в состояния с другой четностью — так называемых запрещенных переходов, подтверждается обширным экспериментальным материалом как атомной, так и ядерной физики. Однако в последнее время (см. § 122) было установлено, что закон сохранения четности не является универсальным физическим законом. При некоторых процессах, происходящих с элементарными частицами, закон сохранения четности нарушается.

§ 34. Соотношение неопределенности для времени и энергии

Из общего аппарата квантовой механики может быть выведено, как показал Л. И. Мандельштам и И. Е. Тамм[1]), соотношение между неопределенностью в энергии ΔE и некоторым интервалом времени Δt. Действительно, полная энергия замкнутой системы может не иметь определенного постоянного во времени значения. Постоянно во времени, как мы выяснили в § 32, ее среднее значение и вероятности измерения того или иного возможного значения. Иными словами, сохраняется во времени вид функции распределения по энергиям.

Знная функцию распределения, можно определить обычным образом величину среднеквадратичного отклонения энергии ΔE, которая тоже, естественно, сохраняется во времени. Энергия бу-

[1]) Л. И. Мандельштам и И. Е. Тамм, Изв. АН СССР, сер. физич. 9, 122 (1945).