§ 36. Свободное движение частицы с заданным моментом количества движения

До сих пор мы представляли свободно движущуюся частицу плоской волной $e^{i(kr-\omega t)}$, где k — волновой вектор частицы $k=\frac{p}{\hbar}$, а $\omega=\frac{E}{\hbar}$. Эта волновая функция описывает стационарное состояние с определенным значением импульса и энергии $E=\frac{p^2}{2m}$ частицы. Для дальнейшего нам следует найти волновые функции таких стационарных состояний свободно движущейся частицы, в которых, помимо определенного значения энергии E, заданы также величина ее момента количества движения и проекции момента на ось z. В классической механике свободная частица, движущаяся с определенным импульсом, автоматически обладает и определенным моментом количества движения. В квантовой механике положение существенно меняется. В состоянии с заданным импульсом момент количества движения является неопределенной величиной. С другой стороны, в состоянии с заданным моментом количества движения и его проекцией на ось z направление импульса также неопределенно. Это связано с тем, что соответствующие величины одновременно не могут иметь определенных значений.

Для того чтобы найти нужную нам волновую функцию, рассмотрим движение свободной частицы в сферических координатах. Положив в уравнении Шредингера (35,3) $U(r)\equiv 0$, имеем

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\hat{l}^2}{2mr^2}\psi=E\psi. \qquad (36,1)$$

Будем искать волновую функцию свободной частицы в виде

$$\psi_{klm}(r,\vartheta,\varphi)=R_{kl}(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi). \qquad (36,2)$$

При этом радиальная функция R_{kl} должна удовлетворять уравнению (35,8), в котором следует положить $U\equiv 0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{kl}}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R_{kl}=0. \qquad (36,3)$$

Здесь мы выразили энергию E через волновое число k. При $l=0$ уравнение перепишется в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{k0}}{dr}\right)+k^2R_{k0}=0. \qquad (36,4)$$

Решением последнего уравнения, не обращающимся в бесконечность в начале координат, служит функция

$$R_{k0}=A\frac{\sin kr}{r}. \qquad (36,5)$$

Для нахождения решения уравнения (36,3) при $l \neq 0$ введем новую функцию по формуле

$$R_{kl} = \frac{Z}{\sqrt{s}}, \tag{36,6}$$

где $s = kr$. При такой замене уравнение (36,3) легко преобразовать к виду

$$\frac{d^2Z}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dZ}{ds} + \left(1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{s^2}\right) Z = 0. \tag{36,7}$$

Решением уравнения (36,7), удовлетворяющим условию конечности волновой функции в начале координат, является функция Бесселя полуцелого порядка

$$Z(s) = CJ_{l+\frac{1}{2}}(s). \tag{36,8}$$

Соответственно для радиальной функции имеем

$$R_{kl} = C\,\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}. \tag{36,9}$$

Вдали от начала координат ($r \to \infty$) можно воспользоваться известным асимптотическим выражением для функции Бесселя и получить асимптотическое значение $R_{kl}(r)$

$$R_{kl}(r) = C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr}. \tag{36,10}$$

Постоянная C определяется условием нормировки. На малых расстояниях от силового центра ($r \to 0$) радиальная функция (36,9) приобретает вид

$$R_{kl} \sim r^l \tag{36,11}$$

в согласии с общим выражением (35,21).

§ 37. Сферическая яма

В качестве наиболее простого и в то же время важного примера рассмотрим движение частицы в поле с центральной симметрией, определяемом выражением

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & (r \leqslant a), \\ 0 & (r > a). \end{cases}$$

Поле такого типа принято называть сферически-симметричной потенциальной ямой. Потенциальная яма, изображенная на