

Для нахождения решения уравнения (36,3) при $l \neq 0$ введем новую функцию по формуле

$$R_{kl} = \frac{Z}{\sqrt{s}}, \quad (36,6)$$

где $s = kr$. При такой замене уравнение (36,3) легко преобразовать к виду

$$\frac{d^2Z}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dZ}{ds} + \left(1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{s^2}\right) Z = 0. \quad (36,7)$$

Решением уравнения (36,7), удовлетворяющим условию конечности волновой функции в начале координат, является функция Бесселя полуцелого порядка

$$Z(s) = CJ_{l+\frac{1}{2}}(s). \quad (36,8)$$

Соответственно для радиальной функции имеем

$$R_{kl} = C \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}. \quad (36,9)$$

Вдали от начала координат ($r \rightarrow \infty$) можно воспользоваться известным асимптотическим выражением для функции Бесселя и получить асимптотическое значение $R_{kl}(r)$

$$R_{kl}(r) = C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr}. \quad (36,10)$$

Постоянная C определяется условием нормировки. На малых расстояниях от силового центра ($r \rightarrow 0$) радиальная функция (36,9) приобретает вид

$$R_{kl} \sim r^l \quad (36,11)$$

в согласии с общим выражением (35,21).

§ 37. Сферическая яма

В качестве наиболее простого и в то же время важного примера рассмотрим движение частицы в поле с центральной симметрией, определяемом выражением

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & (r \leq a), \\ 0 & (r > a). \end{cases}$$

Поле такого типа принято называть сферически-симметричной потенциальной ямой. Потенциальная яма, изображенная на

рис. 9, представляет идеализированную модель системы, в которой силовое взаимодействие с центром осуществляется так называемыми короткодействующими силами. Под короткодействующими силами понимают силы, которые настолько быстро спадают с расстоянием, что их можно считать практически равными нулю на расстояниях, превышающих некоторое расстояние a , именуемое радиусом действия короткодействующих сил. Важность рассмотрения систем с короткодействующими силами ясна, например, из того, что к силам этого типа принадлежат силы взаимодействия между нуклонами — ядерные силы.

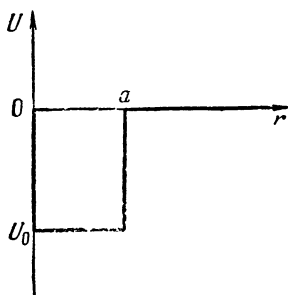


Рис. 9.

Идеализация системы с помощью модели сферической потенциальной ямы сводится к предположениям о полной изотропии сил и постоянстве потенциальной энергии при $r < a$.

Для простоты рассмотрим движение частицы с моментом количества движения $l = 0$. Возможны, очевидно, два различных режима движения. При $E < 0$ полная энергия частицы меньше, чем потенциальная энергия на бесконечности, что соответствует финитному движению. Наоборот, при $E > 0$ имеет место инфинитное движение. Первому случаю, которым мы и ограничимся, соответствует дискретный энергетический спектр, второму — непрерывный.

Волновая функция частицы с $l = 0$ зависит только от координаты r , но не от углов ϑ и φ . Уравнение Шредингера после подстановки $\chi(r) = rR(r)$ будет иметь вид (35,16)

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + U_0)\chi = 0 \quad (r \leq a), \quad (37,1)$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\chi = 0 \quad (r > a). \quad (37,2)$$

Напишем решение уравнения (37,1) в виде

$$\chi(r) = A \sin \kappa r + B \cos \kappa r, \quad (37,3)$$

где обозначено

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - |E|)}.$$

Для конечности волновой функции R в начале координат необходимо положить $\chi(0) = 0$. Следовательно, внутри ямы решение уравнения (37,1) имеет вид

$$\chi(r) = A \sin \kappa r. \quad (37,4)$$

Решение вне ямы, обращаясь в нуль на бесконечности, выражается формулой

$$\chi(r) = Be^{-\kappa' r}, \quad (37,5)$$

где через κ' обозначена величина $\kappa' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E|}$.

Из непрерывности волновой функции следует, что решение (37,4) должно непрерывно переходить в решение (37,5) на поверхности сферы $r = a$. Производная от волновой функции также должна быть непрерывна на этой поверхности. Поэтому мы можем приравнять друг другу логарифмические производные от функций (37,4) и (37,5) при $r = a$. Тогда получаем:

$$\kappa \operatorname{ctg} \kappa a = -\kappa'. \quad (37,6)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\sin \kappa a = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa'^2}{\kappa^2} + 1}} \quad (37,7)$$

или, учитывая выражение для κ и κ' , имеем

$$\sin \kappa a = \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2}} \kappa a. \quad (37,8)$$

Корни уравнения (37,8) определяют уровни энергии частицы в яме. Уравнение (37,8) удобно решать графически. Именно, корни уравнения (37,8) являются точками пересечения прямых

$y_1 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2}} \kappa a$ и $y_1' = -\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2}} \kappa a$ с кривой $\sin \kappa a$ (см.

рис. 10). При этом должны быть выбраны только такие точки пересечения, для которых $\operatorname{ctg} \kappa a$ имеет в соответствии с (37,6) отрицательные значения. Из графика рис. 10 видно, что корни уравнения (37,8) существуют не всегда. Чтобы появилось связанное состояние (уровень энергии), яма должна быть достаточно глубокой. Определим минимальную глубину $U_{0 \text{ мин}}$, соответствующую появлению первого уровня энергии. Как видно из рис. 10,

первый уровень появляется при условии, что прямая проходит через вершину синусоиды $\kappa a = \frac{\pi}{2}$. При этом тангенс угла

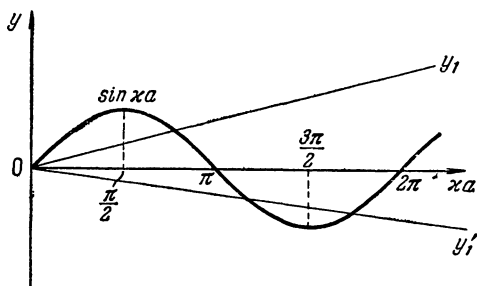


Рис. 10.

наклона прямой равен $2/\pi$. Следовательно, минимальная потенциальная энергия $U_{0\text{ мин}}$, при которой существует связанное состояние частицы в сферической яме, определится условием

$$\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_{0\text{ мин}}a^2}} = \frac{2}{\pi},$$

откуда

$$U_{0\text{ мин}} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\hbar^2}{ma^2}. \quad (37,9)$$

Первый уровень энергии в потенциальной яме минимальной глубины $U_{0\text{ мин}}$ мы найдем из условия

$$\kappa a = \frac{\pi}{2}$$

или

$$\sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}(U_{0\text{ мин}} - |E_1|)} = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая значение $U_{0\text{ мин}}$, находим, что $E_1 = 0$, т. е. энергия частицы на первом уровне равна нулю, никаких других уровней в яме не имеется. С увеличением глубины ямы энергия первого уровня также понижается и становится отрицательной. На графике это соответствует уменьшению угла наклона прямой к оси абсцисс. При некотором угле наклона помимо корня, соответствующего первому уровню, появится и второй корень. Последний отвечает появлению в яме второго уровня энергии. С увеличением глубины ямы число точек пересечения на графике возрастает, что отвечает увеличению числа уровней энергии у частицы в потенциальной яме.

В заключение подчеркнем, что отсутствие связанных состояний частицы в потенциальной яме глубиной $U_0 < U_{0\text{ мин}}$ представляет специфический квантовомеханический эффект, не имеющий аналога в классической физике. Действительно, как бы ни была мала глубина ямы в классической физике, частица, попавшая в яму с начальной кинетической энергией, меньшей глубины ямы, будет удерживаться в ней как угодно долго. В квантовой механике это положение в общем случае не имеет места.

§ 38. Движение в кулоновском поле

Как мы уже указывали, важнейшим примером движения частицы в поле с центральной симметрией является движение электрона в кулоновском поле атомного ядра. Простейшую атомную систему такого рода, состоящую из ядра и одного электрона, представляет атом водорода, а также ион любого атома, в котором остался только один электрон. Другим примером мо-