

качественных оценок можно переписать (39,20) в упрощенном виде. Именно, считая, что изменение длины волны происходит в области действия силового поля, имеющего конечную протяженность  $a$ , можно вместо (39,20) записать:

$$\lambda \ll a$$

или

$$E \gg \frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (39,25)$$

Для  $\alpha$ -частиц ( $m = 6,7 \cdot 10^{-24}$  г) с энергией  $E = 1$  Мэв, пролетающих через атомную оболочку ( $a \sim 10^{-8}$  см), неравенство (39,25) выполняется в хорошем приближении. Напротив, для тех же  $\alpha$ -частиц с энергией 10 Мэв, испытывающих непосредственное соударение с ядром ( $a \sim 10^{-13}$  см), квазиклассическое рассмотрение неприменимо. В области существенно больших энергий применение квазиклассического приближения оказывается возможным и при рассмотрении некоторых процессов, связанных с ядерными соударениями.

#### § 40. Решение уравнения Шредингера вблизи точки поворота

Вернемся теперь к рассмотрению поведения волновой функции вблизи точки поворота.

Идея этого рассмотрения заключается в следующем: поскольку вблизи точки поворота квазиклассическое приближение оказывается неудовлетворительным, необходимо найти решение уравнения Шредингера, не используя это приближение. Возможность получения такого решения при произвольном виде потенциальной энергии связана с тем, что выражение для потенциальной энергии вблизи точки поворота допускает весьма существенное упрощение (см. ниже). Если искомое решение найдено, то следует определить его асим-

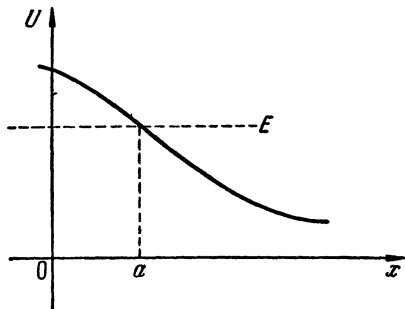


Рис. 12.

птотическое поведение на больших расстояниях по обе стороны от точки поворота, в тех областях, где уже справедливо квазиклассическое приближение. Потребовав совпадения квазиклассического решения с полученным асимптотическим выражением, мы сможем определить соответствующие постоянные.

Переходя к реализации этой программы, заметим, что около точки поворота (рис. 12) можно разложить потенциальную

энергию  $U(x)$  в ряд по малым отклонениям  $\xi = x - a$  и ограничиться линейным членом в этом разложении. При этом мы предполагаем, что в точке поворота кривая  $U(x)$  имеет плавный ход, как это изображено на рис. 12. Мы будем также считать, что область  $x > a$  простирается до бесконечности. Вблизи точки  $x = a$  можем записать:

$$U(x) = U(a) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=a} (x-a) + \dots \quad (40,1)$$

Потенциальная энергия в точке  $a$  совпадает с полной энергией частицы  $U(a) = E$ . Обозначим через  $f$  силу, действующую на частицу в точке поворота  $f = - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=a}$ , и введем новую переменную  $\xi = x - a = \frac{E-U}{f}$ . Уравнение Шредингера вблизи точки  $x = a$  запишем как

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + f \frac{2m}{\hbar^2} \xi \psi = 0. \quad (40,2)$$

Уравнение Шредингера такого вида было нами рассмотрено в § 13. Уравнение (40,2) совпадает с уравнением (13,5) при  $E = 0$ . Следовательно, волновая функция, удовлетворяющая уравнению (40,2) и условию конечности при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , выражается через функцию Эйри. Мы воспользуемся сразу асимптотическими выражениями (13,9) и (13,10). Это означает, что рассматриваются значения  $\xi$ , достаточно большие, чтобы можно было пользоваться асимптотическими выражениями, и в то же время такие, что разложение (40,1) еще применимо. В полях, удовлетворяющих условию квазиклассичности, такая область, как правило, существует.

Соответственно в области  $x \gg a$  решение уравнения (40,2) имеет вид

$$\psi = \frac{2C}{(2mf\xi)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3\hbar} \sqrt{2mf} \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (40,3)$$

где  $2C$  — постоянная нормировки.

Импульс  $p$  при движении в поле (40,1) имеет вид

$$p = \sqrt{2m(E-U)} = \sqrt{2mf\xi}. \quad (40,4)$$

Выразим через переменную  $\xi$  действие

$$\int_a^x p dx = \int_0^\xi p d\xi = \sqrt{2mf} \int_0^\xi \xi^{1/2} d\xi = \frac{2}{3} \sqrt{2mf} \xi^{3/2}. \quad (40,5)$$

Пользуясь (40,5), мы можем представить волновую функцию (40,3) в виде

$$\psi(x) = \frac{2C}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2C}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx - \frac{\pi}{4}\right). \quad (40,6)$$

Мы видим, что функция (40,6) имеет квазиклассический вид [см. (39,16)].

Найдем теперь функцию в области  $x \ll a$ . Пользуясь опять асимптотическим выражением (13,9) и выражениями (40,4), (40,5), имеем

$$\psi = \frac{C}{(2mf\xi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3\hbar} \sqrt{2mf} |\xi|^{3/2}\right) = \frac{C}{\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx\right), \quad (40,7)$$

где  $C$  — та же нормировочная постоянная, что и в формуле (40,6). Таким образом, мы получили выражение для квазиклассической волновой функции, справедливой слева и справа от точки поворота  $x = a$ .

Выпишем окончательно выражения квазиклассической волновой функции:

$$\psi(x) = \begin{cases} C \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} & (x < a), \\ 2C \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) & (x > a). \end{cases} \quad (40,8)$$

Постоянная  $C$  определяется из условия нормировки.

Аналогичным образом, если разрешенная область лежит слева от точки поворота  $b$ , т. е.  $U(x) < E$  при  $x < b$  и  $U(x) > E$  при  $x > b$ , то волновая функция запишется в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} C' \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} & (x > b), \\ 2C' \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p dx - \frac{\pi}{4}\right) & (x < b). \end{cases} \quad (40,9)$$

Итак, нами найдена в квазиклассическом приближении функция  $\psi(x)$ , удовлетворяющая уравнению Шредингера. Полученное решение не является еще полным, поскольку линейное

уравнение второго порядка имеет два линейно независимых решения. В случае волновой функции, зависящей от одной независимой переменной, второе решение уравнения Шредингера может быть легко получено. Именно, если  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — две линейно независимые функции, удовлетворяющие одномерному уравнению Шредингера и отвечающие энергии  $E$ , то они всегда связаны соотношением

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (U - E). \quad (40,10)$$

Интегрируя, получаем

$$\psi_2 \frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} = \text{const.} \quad (40,11)$$

Решение, линейно независимое от (40,8), ищем в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} B_1 \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} & (x < a), \\ B_2 \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \alpha\right) & (x > a). \end{cases} \quad (40,12)$$

Выражения (40,8) и (40,12) следует подставить в соотношение (40,11). При этом в силу неравенства (39,20) достаточно ограничиться дифференцированием по аргументам экспоненциальной и тригонометрической функций. Приравнявая выражения, получаемые при  $x < a$  и  $x > a$ , находим

$$B_1 = B_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

Окончательно полагаем:

$$B_1 = B_2, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, решение, линейно независимое от (40,8), может быть выбрано в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} B \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} & (x < a), \\ B \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) & (x > a). \end{cases} \quad (40,13)$$

Соответственно решение, линейно независимое от (40,9), напишется как

$$\psi(x) = \begin{cases} B' \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x p \, dx} & (x > b), \\ B' \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_x^b p \, dx + \frac{\pi}{4} \right) & (x < b). \end{cases} \quad (40,14)$$

Полученные выражения будут непригодными в том случае, когда в точке поворота, например, точке  $b$ , потенциальная энергия скачком обращается в бесконечность. В этом случае в области  $x \geq b$ ,  $\psi = 0$ . Фаза волновой функции при  $x < b$  может быть определена, если условия применимости квазиклассического приближения (39,20) остаются справедливыми вплоть до точки  $x = b$ . При этом, учитывая, что  $\psi(b) = 0$ , получаем

$$\psi(x) = A \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_x^b p \, dx \right). \quad (40,15)$$

#### § 41. Движение в потенциальной яме в квазиклассическом приближении

Применим полученные результаты к движению частицы в потенциальной яме. При этом мы найдем приближенную формулу для спектра энергии. Ее сравнение с точными формулами позволит нам наглядно судить о степени точности и достоинствах квазиклассического приближения. Наряду с этим решение поставленной задачи представляет большой интерес в другом отношении. Оно позволяет выяснить связь между квантовой механикой и старой теорией Бора.

Рассмотрим, прежде всего, потенциальную яму с бесконечно высокими стенками (см. § 8). Волновая функция в квазиклассическом приближении дается формулой типа (40,15). Именно

$$\psi(x) = A \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_x^b p \, dx \right). \quad (41,1)$$

В потенциальной яме будет две точки поворота  $a$  и  $b$ , в которых волновая функция должна обращаться в нуль. Таким образом, в обеих точках поворота должно выполняться условие  $\psi = 0$  или

$$\frac{A}{\sqrt{p}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p \, dx \right) = 0. \quad (41,2)$$