

Соответственно решение, линейно независимое от (40,9), напишется как

$$\psi(x) = \begin{cases} B' \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x p \, dx} & (x > b), \\ B' \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p \, dx + \frac{\pi}{4} \right) & (x < b). \end{cases} \quad (40,14)$$

Полученные выражения будут непригодными в том случае, когда в точке поворота, например, точке b , потенциальная энергия скачком обращается в бесконечность. В этом случае в области $x \geq b$, $\psi = 0$. Фаза волновой функции при $x < b$ может быть определена, если условия применимости квазиклассического приближения (39,20) остаются справедливыми вплоть до точки $x = b$. При этом, учитывая, что $\psi(b) = 0$, получаем

$$\psi(x) = A \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p \, dx \right). \quad (40,15)$$

§ 41. Движение в потенциальной яме в квазиклассическом приближении

Применим полученные результаты к движению частицы в потенциальной яме. При этом мы найдем приближенную формулу для спектра энергии. Ее сравнение с точными формулами позволит нам наглядно судить о степени точности и достоинствах квазиклассического приближения. Наряду с этим решение поставленной задачи представляет большой интерес в другом отношении. Оно позволяет выяснить связь между квантовой механикой и старой теорией Бора.

Рассмотрим, прежде всего, потенциальную яму с бесконечно высокими стенками (см. § 8). Волновая функция в квазиклассическом приближении дается формулой типа (40,15). Именно

$$\psi(x) = A \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p \, dx \right). \quad (41,1)$$

В потенциальной яме будет две точки поворота a и b , в которых волновая функция должна обращаться в нуль. Таким образом, в обеих точках поворота должно выполняться условие $\psi = 0$ или

$$\frac{A}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^b p \, dx \right) = 0. \quad (41,2)$$

Это условие выполнено, если

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p \, dx = n\pi, \quad (41,3)$$

где n — целые положительные числа, начиная с единицы. Поскольку импульс постоянен и равен $\sqrt{2mE}$, находим

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} n^2, \quad (41,4)$$

где $l = b - a$ — ширина ямы.

Мы видим, что в простейшем случае бесконечно глубокой потенциальной ямы квазиклассическое приближение приводит к точному выражению для энергетического спектра (см. § 8).

Рассмотрим теперь общий случай потенциальной ямы, изображенной на рис. 13. Мы будем считать, что запрещенная область простирается справа и слева от точек поворота как угодно далеко. При этом квазиклассическая волновая функция не будет содержать экспоненциально возрастающих слагаемых и дается формулами типа (40,8) или (40,9). Обе волновые функции, (40,8) и (40,9), описывающие движение частицы в яме, должны быть тождественными выражениями

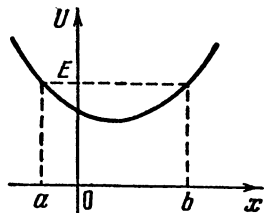


Рис. 13.

$$2C \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p \, dx - \frac{\pi}{4} \right) = 2C' \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p \, dx - \frac{\pi}{4} \right) \quad (41,5)$$

$(a < x < b).$

Последнее возможно лишь в том случае, если сумма обеих фаз равна целому кратному π

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p \, dx - \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad (41,6)$$

где n — целое число. При этом

$$C' = (-1)^n C. \quad (41,7)$$

Если ввести интеграл по периоду классического движения частицы от a до b и обратно $\int_a^b p \, dx = \frac{1}{2} \oint p \, dx$, то из (41,6)

получаем

$$\oint p \, dx = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (41,8)$$

Последнее выражение представляет не что иное, как правило квантования Бора, из которого определяются стационарные состояния частицы в квазиклассическом случае. Таким образом, теория Бора с ее непоследовательным наложением условий квантования на чисто классические величины оказывается совершенно правильной в пределах квазиклассического приближения. Отметим, что число n равно числу корней квазиклассической волновой функции между точками поворота a и b , так как при изменении x от a до b фаза волновой функции возрастает от $-\pi/4$ до $\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{4}$ и, следовательно, косинус n раз обращается в нуль. Чем больше квантовое число n , т. е. чем меньше соответственно длина волны де Бройля, тем лучше условия применимости квазиклассического приближения (39,20). Мы должны ожидать, следовательно, что уровни энергии, полученные из условия (41,8), совпадают при больших числах n с их точными значениями, вычисленными из решения уравнения Шредингера. В некоторых случаях однако, как, например, для гармонического осциллятора, формула (41,8) дает правильное значение уровней энергии при любых числах n . Интеграл, стоящий в левой части уравнения (41,8), представляет площадь, охватываемую классической фазовой траекторией частицы с энергией E на ее фазовой плоскости. Согласно (41,8), эта площадь при $n \gg 1$ равна $2\pi\hbar n$. Поскольку каждому узлу волновой функции отвечает некоторый уровень энергии системы, число n дает нам число состояний с энергиями меньшими или равными E . Таким образом, на одно квантовое состояние в фазовой плоскости приходится площадь, равная $2\pi\hbar$. Число состояний, отвечающих площади на фазовой плоскости $\Delta p \, \Delta x$, будет равно

$$\frac{\Delta p \, \Delta x}{2\pi\hbar}. \quad (41,9)$$

Обобщая эту формулу на трехмерный случай, очевидно, получим число состояний, отвечающих объему $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, \Delta p_x \, \Delta p_y \, \Delta p_z$ в фазовом пространстве

$$\frac{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, \Delta p_x \, \Delta p_y \, \Delta p_z}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (41,10)$$

Эта формула была положена в основу нашего изложения статистической физики. Мы видим, что квазиклассическое приближение представляет как бы мост, соединяющий классическую и квантовую механику. Оно позволяет понять смысл теории Бора и принципа соответствия и дает возможность устра-

нить все кажущиеся противоречия между различными сторонами поведения реальных частиц. С помощью квазиклассического приближения мы можем непосредственно проследить за тем, при каких условиях и с какой степенью точности можно перейти к классическому описанию движения частиц в тех или иных задачах.

Вместе с тем оно дает сравнительно простой способ приближенного описания квантовых систем, в частности частиц высокой энергии, нахождения энергетических уровней и т. п.

§ 42. Прохождение через потенциальный барьер

В § 13 мы рассмотрели прохождение микрочастицы через прямоугольный потенциальный барьер. В этом параграфе мы получим более общие формулы для случая прохождения частиц через потенциальные барьеры произвольной формы (рис. 14). Мы будем предполагать, что энергии частиц E достаточно велики, а ход потенциальной энергии является достаточно плавным для того, чтобы во всем пространстве, за исключением лишь небольших областей около точек поворота a и b , были выполнены условия применимости квазиклассического приближения. Пусть частица падает на барьер, двигаясь слева направо вдоль оси x . Тогда в области за точкой поворота a , т. е. при $x > a$, должна существовать только волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x (в этой области нет отраженной волны). Квазиклассическая волновая функция при $x > a$ может быть взята в виде суперпозиции выражений (40,8) и (40,13)

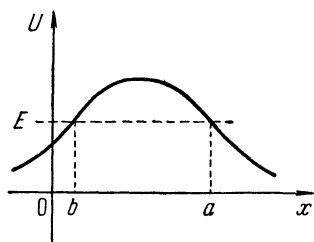


Рис. 14.

$$\Psi(x) = 2C \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p \, dx - \frac{\pi}{4} \right) + B \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p \, dx + \frac{\pi}{4} \right). \quad (42,1)$$

Поскольку на больших расстояниях от точки a импульс p изменяется мало, каждое слагаемое в (42,1) является наложением двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Легко видеть, что суперпозиция (42,1) описывает волну, распространяющуюся слева направо лишь при условии

$$B = -2Ci.$$