нить все кажущиеся противоречия между различными сторонами поведения реальных частиц. С помощью квазиклассического приближения мы можем непосредственно проследить за тем, при каких условиях и с какой степенью точности можно перейти к классическому описанию движения частиц в тех или иных задачах.

Вместе с тем оно дает сравнительно простой способ приближенного описания квантовых систем, в частности частиц высокой энергии, нахождения энергетических уровней и т. п.

§ 42. Прохождение через потенциальный барьер

В § 13 мы рассмотрели прохождение микрочастицы через прямоугольный потенциальный барьер. В этом параграфе мы получим более общие формулы для случая прохождения частиц через потенциальные барьеры произвольной формы (рис. 14). Мы будем предполагать, что энергии частиц E достаточно велики, а ход потенциальной энергии является достаточно плавным для того, чтобы во всем пространстве, за исключением лишь небольших областей около точек поворота a и b, были выполнены условия применимости квазиклассического приближения. Пусть частица падает на барьер, двигаясь слева направо вдоль оси x. Тогда в области за точкой поворота a, т. е. при $x > a$, должна существовать только волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x (в этой области нет отраженной волны). Квазиклассическая волновая функция при $x > a$ может быть взята в виде суперпозиции выражений (40,8) и (40,13)

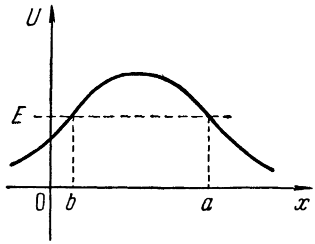

Рис. 14.

$$\psi(x) = 2C \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\,dx - \frac{\pi}{4}\right) + B\frac{1}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\,dx + \frac{\pi}{4}\right). \tag{42,1}$$

Поскольку на больших расстояниях от точки a импульс p изменяется мало, каждое слагаемое в (42, 1) является наложением двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Легко видеть, что суперпозиция (42,1) описывает волну, распространяющуюся слева направо лишь при условии

$$B = -2Ci.$$

При этом

$$\psi=\frac{2C}{\sqrt{p}}e^{i\left(\frac{1}{\hbar}\int\limits_a^x p\,dx-\frac{\pi}{4}\right)}\qquad (x>a). \tag{42,2}$$

Найдем квазиклассическую волновую функцию в области $b<x<a$. Беря суперпозицию (40,8) и (40,13) и учитывая найденное соотношение между B и C, получаем

$$\psi(x)=C\left\{\frac{1}{\sqrt{|p|}}e^{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^a |p|\,dx}+\frac{2}{i\sqrt{|p|}}e^{\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^a |p|\,dx}\right\}\qquad (b<x<a). \tag{42,3}$$

Это соотношение удобно переписать в виде

$$\psi(x)=C\frac{1}{\sqrt{|p|}}\left\{e^{-L}e^{\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^x |p|\,dx}-2ie^{L}e^{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^x |p|\,dx}\right\}\qquad (b<x<a), \tag{42,4}$$

где

$$L=\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^a |p|\,dx.$$

Пользуясь теперь соотношениями (40,9) и (40,14), не представляет труда получить выражение для волновой функции в области перед барьером

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{4C}{i\sqrt{p}}e^{L}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^b p\,dx-\frac{\pi}{4}\right)+\\&\quad+C\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-L}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^b p\,dx+\frac{\pi}{4}\right)=\\&=\frac{2C}{i\sqrt{p}}\left\{\left(e^{L}-\frac{1}{4}e^{-L}\right)e^{i\left(\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^b p\,dx-\frac{\pi}{4}\right)}+\right.\\&\quad\left.+\left(e^{L}+\frac{1}{4}e^{-L}\right)e^{-i\left(\frac{1}{\hbar}\int\limits_x^b p\,dx-\frac{\pi}{4}\right)}\right\}\qquad (x<b).\end{aligned} \tag{42,5}$$

Итак, мы представили волновую функцию в области перед барьером в виде суперпозиции падающей и отраженной волн. Определим теперь коэффициент прохождения D частиц через барьер. Пользуясь (42,2), вычисляем плотность потока частиц, прошедших через барьер $j_{\text{пр}}$

$$j_{\text{пр}} = 4\,|C\,|^2 \frac{1}{m}. \tag{42,6}$$

Плотность потока падающих частиц в соответствии с (42,5) равна

$$j_{\text{пад}} = 4\,|C\,|^2 \frac{1}{m}\left(e^{L} + \frac{1}{4}e^{-L}\right)^2. \tag{42,7}$$

Следовательно, для коэффициента прохождения D получаем следующее выражение:

$$D = \frac{j_{\text{пр}}}{j_{\text{пад}}} = \frac{e^{-2L}}{\left(1 + \frac{1}{4}e^{-2L}\right)^2}. \tag{42,8}$$

Для достаточно широкого потенциального барьера $e^{-2L} \ll 1$, и мы получаем

$$D = e^{-2L} = e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_a^b p\,dx}. \tag{42,9}$$

Отметим, что если потенциальная энергия с одной стороны барьера меняется достаточно быстро, так что квазиклассическое приближение неприменимо, то в выражении (42,9) появится предэкспоненциальный множитель. Однако основной экспоненциальный множитель не меняется. Формула (42,9) широко применяется в квантовой механике для вычисления вероятностей прохождения частиц через потенциальные барьеры.

В виде примера рассмотрим теорию α-распада. Хорошо известно, что все тяжелые ядра с массовыми числами порядка двухсот оказываются нестабильными по отношению к α-распаду. Вероятность распада сильно зависит от энергии вылетающих α-частиц и изменяется в очень широких пределах. Так, если вероятность распада характеризовать периодом полураспада τ, то у Po^{234}, испускающего α-частицы с энергией 7,8 *Мэв*, τ равно $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ *сек*, а у Th^{232} при энергии α-частиц, равной 4 *Мэв*, τ равно $1{,}4 \cdot 10^{10}$ лет. Такая резкая зависимость вероятности α-распада от энергии объясняется тем, что частица для вылета из ядра должна пройти через потенциальный барьер [1]). Действительно, упрощая рассмотрение, мы можем предположить, что исходное ядро уже содержит готовую α-частицу. При этом задача сводится к вычислению вероятности того, что α-частица покинет исходное, материнское ядро.

[1]) R. Gurney, E. Condon, Nature **122**, 439 (1928); Phys. Rev. **33**, 127 (1929).

Обозначим через $U(r)$ энергию взаимодействия α-частицы с оставшимся дочерним ядром. На малых расстояниях $U(r)$ сводится к потенциалу ядерных сил, который мы будем считать постоянным и равным U_0, а на больших расстояниях — к кулоновскому взаимодействию α-частицы и оставшегося ядра (рис. 15)

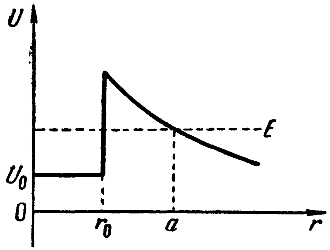

Рис. 15.

$$U(r)=\begin{cases} \dfrac{2Ze^2}{r} & (r>r_0), \\ U_0 & (r\leqslant r_0), \end{cases}$$

где r_0 — расстояние порядка размера ядра.

Воспользовавшись формулой (42,9), мы можем найти для α-частиц вероятность прохождения через потенциальный барьер. То обстоятельство, что формула (42,9) выведена для одномерного движения, здесь не существенно, как так мы установили в § 35, что радиальное движение сводится к одномерному с некоторой эффективной потенциальной энергией.

Для простоты мы рассмотрим случай, когда $l=0$, так что центробежная энергия в расчеты не войдет (см. также следующий параграф). Тогда имеем

$$D=\exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{r_0}^{a}\sqrt{2\mu\left(\frac{2Ze^2}{r}-E\right)}\,dr\right\}=e^{-2L}, \qquad (42,10)$$

где точка поворота a определяется условием $a=\dfrac{2Ze^2}{E}$, а μ — приведенная масса α-частицы и дочернего ядра. Вычислим интеграл L:

$$L=\sqrt{\frac{4\mu Ze^2}{\hbar^2}}\int\limits_{r_0}^{a}\sqrt{1-\frac{E}{U_{\text{макс}}}\frac{r}{r_0}}\frac{dr}{\sqrt{r}},$$

где

$$U_{\text{макс}}=\frac{2Ze^2}{r_0}.$$

Произведя замену переменных $\sqrt{\dfrac{E}{U_{\text{макс}}}\dfrac{r}{r_0}}=\sin\alpha$, легко получим:

$$L=\frac{2Ze^2}{\hbar v}(\pi-2\alpha_0-\sin 2\alpha_0), \qquad (42,11)$$

где

$$\sin\alpha_0=\sqrt{\frac{E}{U_{\text{макс}}}}$$

и $v=\sqrt{2E/\mu}$ — скорость α-частицы, если пренебречь отличием приведенной массы μ от массы α-частицы. Таким образом, вероятность прохождения α-частицы через барьер дается выражением

$$D=\exp\left\{-\frac{4Ze^2}{\hbar v}(\pi-2\alpha_0-\sin 2\alpha_0)\right\}. \tag{42,12}$$

Вероятность α-распада λ мы получим, если умножим вероятность D прохождения через барьер на вероятность α-распада при отсутствии барьера ν

$$\lambda=\nu D.$$

Величину ν трудно вычислить сколько-нибудь точно. Существенно, однако, что очень сильная зависимость вероятности распада от энергии α-частицы заключена в множителе D. Качественно эта зависимость хорошо подтверждается экспериментом.

Заметим, наконец, что подобные же рассуждения применимы и к случаю спонтанного деления тяжелых ядер.

§ 43. Квазиклассическое движение в центрально-симметричном поле

Определим приближенное выражение для радиальной составляющей волновой функции $R(r)$ или функции $\chi(r)=rR$ при условии, что потенциальная энергия $U(r)$ удовлетворяет условию квазиклассичности. При этом мы можем воспользоваться уже выведенными соотношениями, поскольку функция $\chi(r)$, как мы знаем (см. § 35), описывается одномерным волновым уравнением Шредингера с эффективной потенциальной энергией

$$U_{\text{эфф}}(r)=U(r)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}.$$

При этом нужно, конечно, учитывать, что координата r, в отличие от x, меняется от 0 до ∞. При $l=0$ имеем $U_{\text{эфф}}(r)=U(r)$. Если условия квазиклассичности выполняются вплоть до точки $r=0$, то соответствующая волновая функция легко может быть получена. Действительно, условие конечности волновой функции в нуле дает $\chi(0)=0$ и, пользуясь (40,27), получаем:

$$\chi(r)=C\frac{1}{\sqrt{2m(E-U(r))}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^r\sqrt{2m(E-U(r))}\,dr\right). \tag{43,1}$$

В более общем случае $l\neq 0$ условию квазиклассичности должна удовлетворять эффективная потенциальная энергия $U_{\text{эфф}}(r)$. Если считать, что на малых расстояниях основную роль