Следовательно, предыдущее равенство дает

$$|(J_+)_{m+1,m}|^2 = \hbar^2 [j(j+1) - m(m+1)] = \hbar^2 (j-m)(j+m+1).$$

Для матричного элемента $(J_+)_{m+1,\, m}$ имеем

$$(m+1\,|\,J_+\,|\,m) = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,e^{i\beta}.$$

Фазу β без ограничения общности можно положить равной нулю. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}(m+1\,|\,J_+\,|\,m) &= (J_x + iJ_y)_{m+1,\, m} = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)},\\ (m\,|\,J_-\,|\,m+1) &= (J_x - iJ_y)_{m,\, m+1} = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)},\end{aligned} \qquad (51{,}14)$$

т. е.

$$(J_+)_{m+1,\, m} = (J_-)_{m,\, m+1}. \qquad (51{,}15)$$

Из определения матриц J_+ и J_- следует, что

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-), \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-).$$

Используя (51,14), получаем

$$\begin{aligned}(m+1\,|\,J_x\,|\,m) &= (m\,|\,J_x\,|\,m+1) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{(j-m)(j+m+1)},\\ (m+1\,|\,J_y\,|\,m) &= -(m\,|\,J_y\,|\,m+1) = -\frac{i\hbar}{2}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}.\end{aligned} \qquad (51{,}16)$$

В качестве примера выпишем матрицы, которые получаются при $j = 1$:

$$\hat{J}_x = \begin{pmatrix} (J_x)_{11} & (J_x)_{10} & (J_x)_{1,\,-1} \\ (J_x)_{01} & (J_x)_{00} & (J_x)_{0,\,-1} \\ (J_x)_{-1,\,1} & (J_x)_{-1,\,0} & (J_x)_{-1,\,-1} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{J}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (51{,}17)$$

$$\hat{J}^2 = \hbar^2 \cdot 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 52. Сложение моментов количества движения

Определим возможные значения момента количества движения $\boldsymbol{J}$, равного сумме двух моментов $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$. Пусть $\boldsymbol{J}_1$ и $\boldsymbol{J}_2$ — моменты количества движения, относящиеся к двум подсистемам, взаимодействием между которыми можно пренебречь.

Это означает, что операторы $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ и $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ действуют на переменные, относящиеся к разным подсистемам, и, следовательно, коммутируют между собой $\hat{\boldsymbol{J}}_1\hat{\boldsymbol{J}}_2 = \hat{\boldsymbol{J}}_2\hat{\boldsymbol{J}}_1$. Поскольку каждый из операторов $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ и $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ удовлетворяет перестановочным соотношениям (51,1), то этим же перестановочным соотношениям удовлетворяет и оператор $\hat{\boldsymbol{J}}$. Состояние системы будет задано, если будут заданы квантовые числа j_1, j_2 и m_1, m_2, характеризующие полные моменты $\boldsymbol{J}_1^2$ и $\boldsymbol{J}_2^2$ и их проекции на произвольно ориентированную ось z (мы отвлекаемся от других величин, входящих в полный набор, поскольку для дальнейшего они не существенны). При заданных j_1 и j_2 каждое из чисел m_1 и m_2 пробегает соответственно $(2j_1 + 1)$ и $(2j_2 + 1)$ значений. Следовательно, заданным числам j_1 и j_2 отвечает $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ состояний. Однако вместо четырех чисел j_1, j_2, m_1, m_2 состояние системы можно характеризовать числами j_1, j_2, j и m, где j и m — квантовые числа, отвечающие полному моменту $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ и его проекции на ось z. Это означает, по-существу, переход от представления j_1, j_2, m_1, m_2 к представлению j_1, j_2, j, m. Действительно, операторы, отвечающие последним четырем величинам, с таким же успехом могут входить в полный набор, как и операторы, отвечающие величинам j_1, j_2, m_1, m_2. Так как имеет место очевидное равенство $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$, то квантовое число m равно сумме $m = m_1 + m_2$. Для квадратов моментов, разумеется, такого простого соотношения уже не существует и нам следует определить возможные значения числа j при заданных j_1 и j_2. Прежде всего заметим, что максимальное значение числа j получится, если мы возьмем наибольшее m_1, равное j_1, и наибольшее m_2, равное j_2. Следовательно, в этом случае $j = j_1 + j_2$. Возьмем, далее, следующее возможное значение числа m, равное $m = j_1 + j_2 - 1$. Такое значение числа m может реализоваться либо при $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2 - 1$, либо при $m_1 = j_1 - 1$, $m_2 = j_2$. Таким образом, данному значению $m = j_1 + j_2 - 1$ отвечают два независимых состояния. Следовательно, данному m должно отвечать два возможных значения числа j. Но так как наибольшее возможное значение j равно $j_1 + j_2$ и так как число m не может быть больше числа j, то ясно, что выбранному m могут отвечать лишь $j = j_1 + j_2$ и $j = j_1 + j_2 - 1$. Выбирая m еще на единицу меньше, мы получим три состояния, отвечающие данному m:

1) $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2 - 2$;
2) $m_1 = j_1 - 1$, $m_2 = j_2 - 1$;
3) $m_1 = j_1 - 2$, $m_2 = j_2$.

Аналогично предыдущему приходим к тому, что число j может принимать значения $j = j_1 + j_2$, $j = j_1 + j_2 - 1$ и $j = j_1 + j_2 - 2$.

Продолжая эти рассуждения и дальше, мы получим, что при данных j_1 и j_2 число j может принимать значения:

$$j = j_1 + j_2; \quad j_1 + j_2 - 1; \quad j_1 + j_2 - 2, \ \ldots, \ j_1 - j_2. \tag{52,1}$$

Всего число j принимает $2j_2 + 1$ значений (при условии, что $j_2 \leqslant j_1$, в противном случае индексы 1 и 2 нужно поменять местами). Полное число состояний, отвечающих данным j_1 и j_2, равно

$$\sum_{j=j_1-j_2}^{j=j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1),$$

как и должно быть. Приведенный результат был получен ранее в так называемой «векторной модели», введенной еще до появления квантовой механики. В векторной модели принимается, что длина вектора j, образованного сложением двух векторов момента j_1 и j_2, может изменяться скачкообразно на единицу. Она максимальна, когда эти векторы «параллельны» $j = j_1 + j_2$, и минимальна, когда они «антипараллельны» $j = j_1 - j_2$.

В том случае, когда нужно сложить три и более момента количества движения, мы должны применять выведенное правило, складывая их попарно.

Наряду с возможными значениями j можно найти и вероятность того, что полный момент системы равен тому или иному возможному значению j при заданных j_1 и j_2. Для этого нужно, согласно общим правилам (§ 21), разложить волновую функцию системы, описывающую состояние с заданными значениями j_1, j_2, m_1, m_2, по волновым функция ψ_{jm} состояний с заданными j_1, j_2, j, m. Поскольку исходная система разбита на две невзаимодействующие подсистемы, то ее волновая функция с заданными j_1, m_1; j_2, m_2 может быть представлена в виде произведения двух функций, относящихся соответственно к каждой из подсистем $\psi_{j_1 j_2 m_1 m_2} = \psi_{j_1 m_1}(1)\,\psi_{j_2 m_2}(2)$. Упомянутое разложение имеет вид

$$\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} = \sum_j C^j_{m_1 m_2} \psi_{j,\, m_1 + m_2}. \tag{52,2}$$

Квадраты модулей коэффициентов $C^j_{m_1 m_2}$ определяют искомые вероятности. Заметим, что поскольку преобразование волновых функций от одного представления к другому осуществляется унитарными матрицами, мы можем разложение, обратное (52,2), написать как

$$\psi_{jm} = \sum_{m_2} \left(C^j_{m-m_2,\, m_2}\right)^* \psi_{j_1,\, m-m_2}(1)\, \psi_{j_2 m_2}(2). \tag{52,3}$$

Коэффициенты $C^j_{m_1 m_2}$ были вычислены Вигнером методом теории групп. Довольно полную таблицу этих коэффициентов читатель найдет, например, в книге Е. Кондона и Г. Шортли[1]). Мы же ограничимся рассмотрением наиболее простого случая, когда один из моментов равен половине, а другой произволен. Итак, будем считать, что $j_2 = \frac{1}{2}$. При данном j_2 число m_2 пробегает лишь два значения, а именно: $m_2 = \frac{1}{2}$ и $m_2 = -\frac{1}{2}$. Соответственно разложение (52,3) мы можем переписать, опуская все лишние индексы в виде

$$\psi_{jm} = C_{1/2}\psi_{j_1,\, m-1/2}(1)\,\psi_{1/2\,1/2}(2) + C_{-1/2}\psi_{j_1,\, m+1/2}(1)\,\psi_{1/2,\,-1/2}(2). \qquad (52,4)$$

Подействуем на левую и правую части этого разложения оператором $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = (\hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2)^2 = \hat{\boldsymbol{J}}_1^2 + \hat{\boldsymbol{J}}_2^2 + 2\hat{\boldsymbol{J}}_1\hat{\boldsymbol{J}}_2$. Скалярное произведение, стоящее справа, удобно несколько преобразовать, так что

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 = \hat{\boldsymbol{J}}_1^2 + \hat{\boldsymbol{J}}_2^2 + (\hat{J}_{1x} + i\hat{J}_{1y})(\hat{J}_{2x} - i\hat{J}_{2y}) + (\hat{J}_{1x} - i\hat{J}_{1y})(\hat{J}_{2x} + i\hat{J}_{2y}) + \\ + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z} = \hat{\boldsymbol{J}}_1^2 + \hat{\boldsymbol{J}}_2^2 + \hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+} + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z}. \qquad (52,5)$$

При действии этим оператором на левую часть равенства (52,4) получим $\hbar^2 j(j+1)$. При действии на правую часть удобно представить оператор $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ в виде (52,5), причем нужно помнить, что каждый из операторов $\hat{\boldsymbol{J}}_1$, $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ действует лишь на волновую функцию соответствующей подсистемы. Из матричных соотношений (51,14) следует, что

$$\hat{J}_{2-}\psi_{1/2,\,-1/2}(2) = \hat{J}_{2+}\psi_{1/2\,1/2}(2) = 0,$$

$$\hat{J}_{2-}\psi_{1/2\,1/2}(2) = \hbar\psi_{1/2,\,-1/2}(2),$$

$$\hat{J}_{2+}\psi_{1/2,\,-1/2}(2) = \hbar\psi_{1/2\,1/2}(2),$$

$$\hat{J}_{1+}\psi_{j_1,\,m-1/2}(1) = \hbar\sqrt{\left(j_1 - m + \frac{1}{2}\right)\left(j_1 + m + \frac{1}{2}\right)}\,\psi_{j_1,\,m+1/2}(1),$$

$$\hat{J}_{1-}\psi_{j_1,\,m+1/2}(1) = \hbar\sqrt{\left(j_1 - m + \frac{1}{2}\right)\left(j_1 + m + \frac{1}{2}\right)}\,\psi_{j_1,\,m-\frac{1}{2}}(1).$$

Используя эти соотношения, мы получим следующее уравнение:

$$j(j+1)\psi_{jm} = \left[C_{1/2}\left(j_1(j_1+1) + \frac{1}{4} + m\right) + \right. \\ \left. + C_{-1/2}\sqrt{\left(j_1 + m + \frac{1}{2}\right)\left(j_1 - m + \frac{1}{2}\right)}\right]\psi_{j_1,\,m+1/2}(1)\,\psi_{1/2\,1/2}(2) + \\ + \left[C_{-1/2}\left(j_1(j_1+1) + \frac{1}{4} - m\right) + \right. \\ \left. + C_{1/2}\sqrt{\left(j_1 - m + \frac{1}{2}\right)\left(j_1 + m + \frac{1}{2}\right)}\right]\psi_{j_1,\,m+1/2}(1)\,\psi_{1/2,\,-1/2}(2).$$

[1]) См. ссылку на стр. 200.

Подставляя в левую часть вместо ψ_{jm} опять разложение (52,4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\psi(1)\psi(2)$, мы получим два уравнения относительно $C_{1/2}$ и $C_{-1/2}$. Из этих двух уравнений, однако, лишь одно будет независимым. Оно дает

$$C_{-1/2}=C_{1/2}\frac{j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{1}{4}-m}{\sqrt{\left(j_1+m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{1}{2}\right)}}. \tag{52,6}$$

Другое соотношение получим, если учтем, что квадраты модулей этих коэффициентов равны соответствующим вероятностям

$$|C_{-1/2}|^2+|C_{1/2}|^2=1. \tag{52,7}$$

Соотношения (52,6) и (52,7) определяют нам коэффициенты $C_{1/2}$ и $C_{-1/2}$ с точностью до несущественного фазового множителя $e^{i\alpha}$ (фазу выбираем в соответствии с принятой в таблицах коэффициентов $C^j_{m_1m_2}$; см. Кондон и Шортли). Поскольку при $j_2=\frac{1}{2}$ полный момент j может принимать лишь два значения $j_1+\frac{1}{2}$ и $j_1-\frac{1}{2}$, получаем следующие значения коэффициентов $C^j_{m_1m_2}$ (см. таблицу):

Таблица коэффициентов $C^j_{m_1m_2}$

j	$m_2=\frac{1}{2}$	$m_2=-\frac{1}{2}$
$j_1+\frac{1}{2}$	$\sqrt{\dfrac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$
$j_1-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\dfrac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$