Весьма существенно, что отношение собственного магнитного момента к спиновому механическому моменту равно e/mc

$$\mu = \frac{e}{mc} s, \tag{59,4}$$

в то время как для орбитального движения это отношение вдвое меньше (см. § 63).

В § 118 мы покажем, что такая величина собственного магнитного момента также может быть выведена теоретически из релятивистского волнового уравнения Дирака.

Спиновые свойства элементарных частиц играют огромную роль как в области микроявлений, так и в поведении макроскопических тел. Последнее обстоятельство связано с тем, что спин непосредственно определяет статистические свойства систем, построенных из квантовых частиц.

§ 60. Операторы спина

Хотя, как мы увидим ниже, существование у электрона спина и все связанные с ним свойства могут быть установлены теоретически из положений релятивистской квантовой механики, ряд свойств частиц со спином может быть получен и без привлечения релятивистской теории, на основании общих квантовомеханических соображений и сравнительно небольшого числа экспериментальных фактов. Поскольку такая полуэмпирическая теория частиц со спином имеет достаточно простой характер и позволяет получить важные результаты, мы остановимся ниже на ее изложении.

Волновая функция частицы со спином будет зависеть не только от ее трех пространственных координат, но и от четвертой координаты, характеризующей внутреннее состояние частицы. В качестве последней можно выбрать величину проекции спина на произвольно ориентированную в пространстве ось z. Тогда волновую функцию можно написать в виде

$$\psi = \psi(x, s_z, t). \tag{60,1}$$

В отличие от пространственных координат x, «спиновая координата» s_z принимает лишь дискретный ряд значений. Число возможных значений s_z определяется свойствами данной элементарной частицы. Как было упомянуто выше, спин большинства элементарных частиц равен половине. Поскольку проекция спина при этом может принимать только два значения, волновую функцию (60,1) удобно записать в виде столбца с двумя строчками:

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi\left(x, \quad \frac{\hbar}{2}, t\right)\\ \psi\left(x, \ -\frac{\hbar}{2}, t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}. \tag{60,2}$$

При этом $|\psi_1|^2 dV$ мы можем интерпретировать как вероятность того, что в момент времени t электрон находится в элементе объема dV и имеет при этом проекцию спина на ось z, равную $\frac{\hbar}{2}$. $|\psi_2|^2 dV$ соответственно вероятность того, что у электрона, находящегося в том же элементе объема dV проекция спина на ось z равна $-\frac{\hbar}{2}$. Волновая функция $\psi(x, s_z, t)$ предполагается нормированной так, что

$$\sum_{s_z}\int|\psi(x, s_z, t)|^2 dV=1,$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям проекции спина s_z. Если вероятность той или иной проекции спина не зависит от координат частицы, то волновую функцию (60,2) можно переписать в виде

$$\psi=\psi(x, t)\varphi, \tag{60,3}$$

где $\psi(x, t)$ — обычная (координатная) и $\varphi=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ — спиновая волновые функции, c_1 и c_2 — некоторые числа. $|c_1|^2$ и $|c_2|^2$ дают вероятности того, что проекция спина s_z равна соответственно $+\frac{\hbar}{2}$ и $-\frac{\hbar}{2}$.

В силу условия нормировки волновой функции имеем:

$$|c_1|^2+|c_2|^2=1. \tag{60,4}$$

Определив понятие спиновой волновой функции, мы должны ввести действующие на нее операторы спина. В общем виде действие оператора на спиновую функцию $\varphi=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ сводится к тому, что компоненты c_1 и c_2 заменяются на их некоторую линейную комбинацию

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_{11}c_1+a_{12}c_2\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2\end{pmatrix}. \tag{60,5}$$

В соответствии с этим спиновый оператор может быть представлен в виде матрицы

$$\hat{a}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}. \tag{60,6}$$

Правило действия такого оператора на волновую функцию дается формулой (60,5), т. е.

$$\hat{a}\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \end{pmatrix}. \tag{60,7}$$

Если разбиение волновой функции на координатную и спиновую составляющие недопустимо, то формула (60,7) перепишется в виде

$$\hat{a}\psi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 \\ a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 \end{pmatrix}. \tag{60,8}$$

Среднее значение оператора $\hat{a}$, взятое в состоянии ψ, определяется согласно общей формуле (44,8):

$$\bar{a}(x, t) = \psi_1^* a_{11}\psi_1 + \psi_1^* a_{12}\psi_2 + \psi_2^* a_{21}\psi_1 + \psi_2^* a_{22}\psi_2. \tag{60,9}$$

Это равенство можно переписать в матричной форме

$$\bar{a}(x, t) = \psi^+ \hat{a}\psi, \tag{60,10}$$

где ψ^+ — матрица, состоящая из одной строки с элементами ψ_1^* и ψ_2^*:

$$\psi^+ = (\psi_1^* \psi_2^*). \tag{60,11}$$

Соотношение (60,10) определяет среднее значение величины a в момент времени t в данной точке пространства x. Если это выражение усреднить по всем положениям частицы, то мы получим

$$\bar{a}(t) = \int \psi^+ \hat{a}\psi \, dV. \tag{60,12}$$

Введем теперь операторы проекций спина $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$. В § 51 было показано, что вид этих операторов и все свойства спина могут быть получены, если за основу взяты перестановочные соотношения

$$\left.\begin{aligned} \hat{s}_x\hat{s}_y - \hat{s}_y\hat{s}_x &= i\hbar\hat{s}_z, \\ \hat{s}_y\hat{s}_z - \hat{s}_z\hat{s}_y &= i\hbar\hat{s}_x, \\ \hat{s}_z\hat{s}_x - \hat{s}_x\hat{s}_z &= i\hbar\hat{s}_y. \end{aligned}\right\} \tag{60,13}$$

То обстоятельство, что операторы проекций спина должны удовлетворять тем же перестановочным соотношениям, что и операторы проекций орбитального момента, конечно, не является случайным. Именно, в § 30 было показано, что оператор проекции орбитального момента на какую-либо ось связан с оператором бесконечно малого поворота вокруг этой оси. Перестановочные соотношения (30,3) и (30,3′) являются следствием этого обстоятельства, т. е. следствием коммутационных соотношений между операторами бесконечно малых вращений. В следующем параграфе мы покажем, что операторы проекций спина также связаны с операторами поворота, воздействующими, однако, уже не на координатную, а на спиновую функцию. Следствием коммутационных соотношений между операторами бесконечно малых вращений вокруг осей x, y, z и являются перестановочные соотношения (60,13). Приведенные соображения строго обосновываются методами теории групп[1]).

Из соотношений (60,13) следует аналогично (30,4)

$$\left.\begin{aligned} \hat{s}_x\hat{\mathbf{s}}^2 - \hat{\mathbf{s}}^2\hat{s}_x &= 0, \\ \hat{s}_y\hat{\mathbf{s}}^2 - \hat{\mathbf{s}}^2\hat{s}_y &= 0, \\ \hat{s}_z\hat{\mathbf{s}}^2 - \hat{\mathbf{s}}^2\hat{s}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{60,14}$$

Таким образом, квадрат полного спина и одна из его проекций на произвольную ось могут быть измерены одновременно. Две проекции спина на разные оси одновременно не имеют определенных значений.

При $s=\frac{1}{2}$ матрицы спина $\hat{\mathbf{s}}^2=\hat{s}_x^2+\hat{s}_y^2+\hat{s}_z^2$ и его проекции на ось z в своем собственном представлении имеют вид (диагональные матричные элементы равны собственным значениям соответствующих операторов)

$$\hat{\mathbf{s}}^2=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \quad \hat{s}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\sigma_z. \tag{60,15}$$

Матрицы $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$ в этом представлении, согласно общей формуле (51,16), запишутся так:

$$\hat{s}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\sigma_x; \quad \hat{s}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\sigma_y. \tag{60,16}$$

Матрицы σ_x, σ_y, σ_z, отличающиеся от матриц $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$ постоянным множителем $\frac{\hbar}{2}$, носят название матриц Паули. Они удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x\sigma_y &= -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \\ \sigma_y\sigma_z &= -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x, \\ \sigma_z\sigma_x &= -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y, \end{aligned}\right\} \tag{60,17}$$

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1.$$

---

[1]) См. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат, 1947, стр. 165.

Произвольная матрица второго ранга может быть выражена через матрицы σ_x, σ_y, σ_z и единичную матрицу.

Наряду со сходством между орбитальным и спиновым моментами между ними существует принципиальное различие. В то время как орбитальный момент характеризуется квантовым числом l, могущим принимать любые целочисленные значения независимо от природы частицы, спиновое число s принимает ограниченный ряд значений, например $s = {}^1/_2$ для большинства элементарных частиц. При этом каждый вид элементарных частиц имеет свое характерное значение спина. Если совершить переход к классической механике, положив $\hbar \to 0$, то, как это было выяснено в § 41, следует одновременно перейти к пределу больших квантовых чисел. Поэтому, хотя по формуле (30,15) $l^2 = \hbar^2 l(l+1)$, из условия $\hbar \to 0$ еще не следует, что $l = 0$, так как одновременно с $\hbar \to 0$ следует положить $l \to \infty$. В случае спинового момента дело обстоит иначе. Поскольку s принимает лишь ограниченный ряд значений, переход к классической механике всегда приводит к значению спина $s = 0$. Мы видим, что в классической механике нет никакой величины, которая служила бы классическим аналогом спина. Спин — чисто квантовое понятие, характеризующее специфические свойства микрочастиц.

§ 61. Собственные функции операторов проекций спина частицы. Матрица поворота

Найдем собственные функции и собственные значения операторов $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$. Уравнение для собственных функций $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ и собственных значений s_x оператора $\hat{s}_x$ имеет вид

$$\hat{s}_x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая (60,16) и производя умножение, получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} c_2 \\ \frac{\hbar}{2} c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x c_1 \\ s_x c_2 \end{pmatrix}.$$

Раскрываем это равенство:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hbar}{2} c_2 &= s_x c_1, \\ \frac{\hbar}{2} c_1 &= s_x c_2, \end{aligned}\right\} \qquad (61,1)$$