Произвольная матрица второго ранга может быть выражена через матрицы σ_x, σ_y, σ_z и единичную матрицу.

Наряду со сходством между орбитальным и спиновым моментами между ними существует принципиальное различие. В то время как орбитальный момент характеризуется квантовым числом l, могущим принимать любые целочисленные значения независимо от природы частицы, спиновое число s принимает ограниченный ряд значений, например $s = {}^1/_2$ для большинства элементарных частиц. При этом каждый вид элементарных частиц имеет свое характерное значение спина. Если совершить переход к классической механике, положив $\hbar \to 0$, то, как это было выяснено в § 41, следует одновременно перейти к пределу больших квантовых чисел. Поэтому, хотя по формуле (30,15) $l^2 = \hbar^2 l(l+1)$, из условия $\hbar \to 0$ еще не следует, что $l = 0$, так как одновременно с $\hbar \to 0$ следует положить $l \to \infty$. В случае спинового момента дело обстоит иначе. Поскольку s принимает лишь ограниченный ряд значений, переход к классической механике всегда приводит к значению спина $s = 0$. Мы видим, что в классической механике нет никакой величины, которая служила бы классическим аналогом спина. Спин — чисто квантовое понятие, характеризующее специфические свойства микрочастиц.

§ 61. Собственные функции операторов проекций спина частицы. Матрица поворота

Найдем собственные функции и собственные значения операторов $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$. Уравнение для собственных функций $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ и собственных значений s_x оператора $\hat{s}_x$ имеет вид

$$\hat{s}_x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая (60,16) и производя умножение, получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} c_2 \\ \frac{\hbar}{2} c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x c_1 \\ s_x c_2 \end{pmatrix}.$$

Раскрываем это равенство:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hbar}{2} c_2 &= s_x c_1, \\ \frac{\hbar}{2} c_1 &= s_x c_2, \end{aligned}\right\} \qquad (61,1)$$

откуда, перемножая, находим s_x:

$$s_x = \pm \frac{\hbar}{2}.$$

Собственные значения оператора проекции спина, как и следовало ожидать, оказались равными $\pm \frac{\hbar}{2}$. Определим вид собственных функций, отвечающих этим собственным значениям.

При $s_x = +\frac{\hbar}{2}$ из (61,1) имеем:

$$c_1 = c_2.$$

Учитывая условие нормировки (60,4), окончательно получаем

$$\varphi_{s_x=+\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} c^{i\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{61,2}$$

где α_1 — произвольная фаза.

При $s_x = -\frac{\hbar}{2}$ соответственно

$$c_1 = -c_2$$

и спиновая волновая функция запишется в виде

$$\varphi_{s_x=-\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{61,3}$$

Собственные значения операторов $\hat{s}_y$ и $\hat{s}_z$, естественно, также равны $\pm \frac{\hbar}{2}$. Аналогичным образом находим и их собственные функции

$$\varphi_{s_y=\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} c^{i\alpha_3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \varphi_{s_y=-\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_4} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \tag{61,4}$$

$$\varphi_{s_z=\hbar/2} \equiv \varphi_{1/2} = e^{i\alpha_5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi_{s_z=-\hbar/2} \equiv \varphi_{-1/2} = c^{i\alpha_6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{61,5}$$

Произвольные фазовые множители α_i можно положить, в частности, равными нулю.

Произведем теперь некоторое вращение системы координат $x, y, z \to x', y', z'$. Спиновые волновые функции при этом также изменяются $\varphi \to \varphi'$. Действительно, переход от системы координат x, y, z к системе x', y', z' означает соответствующий переход от одного представления к другому. Такой переход, как мы знаем (см. § 46), осуществляется с помощью некоторой унитарной матрицы $\hat{T}$, так что $\varphi' = \hat{T}\varphi$. В данном случае унитарную матрицу $\hat{T}$ естественно назвать матрицей поворота. Определим эту матрицу. Рассмотрим сначала вращение лишь вокруг оси z

на некоторый угол η. Согласно (46,15), операторы проекций спина в новом представлении имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \hat{s}'_x &= \hat{T}_z \hat{s}_x \hat{T}_z^{-1}, \\ \hat{s}'_y &= \hat{T}_z \hat{s}_y \hat{T}_z^{-1}, \\ \hat{s}'_z &= \hat{T}_z \hat{s}_z T_z^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{61,6}$$

Здесь $\hat{s}'_x$, $\hat{s}'_y$, $\hat{s}'_z$ — операторы проекций спина на старые оси координат x, y, z, взятые, однако, в новом представлении, связанном с системой x', y', z'. Поскольку мы рассматриваем вращение вокруг оси z, оси z и z' совпадают и, следовательно, совпадают операторы проекций спина на эти оси в обоих представлениях (выражаются диагональной матрицей (60,15)). Однако условия того, что оператор проекции спина на ось z выбран в виде диагональной матрицы (60,15), еще не достаточно для определения операторов проекций спина на другие направления. Оператор проекции спина на любое направление будет известен, если мы зададим в виде матриц еще операторы $\hat{s}_x$ и $\hat{s}_y$ в некоторой системе координат x, y, z, с которой мы связываем представление. Мы можем, в частности, выбрать представление, связанное с системой x', y', z'. В этом представлении (мы его отмечаем штрихами) операторы проекций спина $\hat{s}'_{x'}$, $\hat{s}'_{y'}$, $\hat{s}'_{z'}$ на оси x', y', z' имеют вид (60,16), (60,15).

Ввиду того, что операторы $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$ отвечают проекциям спинового момента, они должны преобразовываться при вращениях системы координат как проекции момента количества движения, т. е. как компоненты аксиального вектора. Так как мы рассматриваем вращение на угол η вокруг оси z, то операторы проекций спина на штрихованные и нештрихованные оси координат связаны между собой соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \hat{s}_x &= \hat{s}_{x'} \cos\eta - \hat{s}_{y'} \sin\eta, \\ \hat{s}_y &= \hat{s}_{x'} \sin\eta + \hat{s}_{y'} \cos\eta, \\ \hat{s}_z &= \hat{s}_{z'}. \end{aligned}\right\} \tag{61,7}$$

Равенства (61,7) имеют место в любом представлении. В частности, в представлении, связанном с повернутой системой координат, имеем

$$\left.\begin{aligned} \hat{s}'_x &= \hat{s}'_{x'} \cos\eta - \hat{s}'_{y'} \sin\eta = \hat{s}_x \cos\eta - \hat{s}_y \sin\eta, \\ \hat{s}'_y &= \hat{s}'_{x'} \sin\eta + \hat{s}'_{y'} \cos\eta = \hat{s}_x \sin\eta + \hat{s}_y \cos\eta, \\ \hat{s}'_z &= \hat{s}'_{z'} = \hat{s}_z. \end{aligned}\right\} \tag{61,8}$$

Действительно, обе системы координат, штрихованная и нештрихованная, совершенно равноправны. Операторы проекций спина на оси штрихованной системы координат, взятые в представлении, связанном именно с этой повернутой системой координат, имеют, как мы уже отмечали, обычный вид (60,15), (60,16), т. е. совпадают с операторами проекций спина на оси нештрихованной системы координат, взятыми в представлении, связанном с нештрихованной системой координат:

$$\hat{s}'_{x'} = \hat{s}_x; \quad \hat{s}'_{y'} = \hat{s}_y; \quad \hat{s}'_{z'} = \hat{s}_z.$$

Рассматривая совместно равенства (61,6) и (61,8), мы и найдем матрицу $\hat{T}_z$. Прежде всего из (61,6) и (61,8) следует, что $\hat{s}_z = \hat{T}_z \hat{s}_z \hat{T}_z^{-1}$, т. е. матрица $\hat{T}_z$ коммутирует с $\hat{s}_z$. Поскольку матрица $\hat{s}_z$ диагональна, диагональна и матрица $\hat{T}_z$ (см. § 47). Следовательно, матрица $\hat{T}_z$ имеет вид

$$\hat{T}_z = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Условие унитарности матрицы $\hat{T}_z$, $\hat{T}_z\hat{T}_z^+ = \hat{T}_z^+\hat{T}_z = 1$ приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} |a_1|^2 & 0 \\ 0 & |a_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или $|a_1|^2 = 1$ и $|a_2|^2 = 1$.

Следовательно, матрица $\hat{T}_z$ имеет вид

$$\hat{T}_z = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}, \tag{61,9}$$

где α_1 и α_2 — вещественны.

Уравнение (61,6) перепишем в виде

$$\hat{s}'_x \hat{T}_z = \hat{T}_z \hat{s}_x, \qquad \hat{s}'_y \hat{T}_z = \hat{T}_z \hat{s}_y.$$

Подставляя в эти выражения значения $\hat{s}'_x$ и $\hat{s}'_y$ из (61,8) и приравнивая соответствующие матричные элементы, найдем, что равенства удовлетворяются при условии $\alpha_1 - \alpha_2 = \eta$.

Таким образом, для двух фаз α_1 и α_2 мы получили только одно условие, их связывающее. Это обстоятельство не является случайным. Дело в том, что матрица $\hat{T}_z$ может содержать произвольный общий фазовый множитель, который не скажется ни на каких результатах, так как сами волновые функции определены с точностью до произвольного фазового множителя. В соответствии с этим представим матрицу $\hat{T}_z$ в виде

$$\hat{T}_z(\eta) = \begin{pmatrix} e^{i\eta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta/2} \end{pmatrix}. \tag{61,10}$$

Матрицу $\hat{T}_z$ можем также выразить через матрицу σ_z:

$$\hat{T}_z(\eta) = \cos\frac{\eta}{2} + i\sigma_z \sin\frac{\eta}{2}, \tag{61,11}$$

или в несколько иной форме:

$$\hat{T}_z = e^{\frac{i}{2}\eta\sigma_z}. \tag{61,12}$$

Последнее выражение следует понимать как

$$\hat{T}_z = 1 + \left(\frac{i}{2}\eta\sigma_z\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}\eta\sigma_z\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\eta\sigma_z\right)^n + \ldots$$

Так как $\sigma_z^2 = 1$, $\sigma_z^3 = \sigma_z$ и т. д., ряд легко свертывается, и мы опять приходим к формуле (61,11). Если угол поворота мал, то матрица поворота (61,12) имеет вид

$$\hat{T}_z = 1 + i\frac{\eta}{\hbar}\hat{s}_z, \tag{61,13}$$

где мы ввели вместо σ_z матрицу $\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$. Мы получили выражение, которое имеет ту же структуру, что и полученный в § 30 оператор поворота, действующий на функцию, зависящую от пространственных координат.

Соотношение типа (61,11) справедливо, конечно, и для поворота вокруг любой другой оси, поскольку все направления равноправны. Так, например, выпишем матрицу поворота $\hat{T}_x$ вокруг оси x на некоторый угол ϑ:

$$\hat{T}_x(\vartheta) = \cos\frac{\vartheta}{2} + i\sigma_x \sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{61,13'}$$

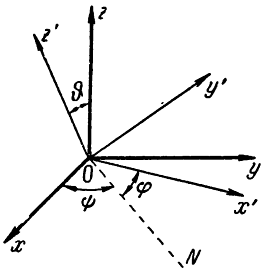

Рис. 17.

Произвольный поворот одной координатной системы относительно другой можно охарактеризовать тремя углами Эйлера ϑ, φ, ψ (рис. 17). Угол ψ — угол между осью Ox и прямой ON пересечения плоскостей xOy и $x'Oy'$, ϑ — угол между осями Oz и Oz' и, наконец, φ — угол между ON и осью Ox'. Полное вращение можно разбить на три последовательных вращения: I — вокруг оси z на угол ψ; II — вокруг нового положения оси $x(ON)$ на угол ϑ и III — вокруг нового положения оси Oz на угол φ. Матрица поворота T будет равна произведению трех матриц $\hat{T} = \hat{T}_z(\varphi)\hat{T}_x(\vartheta)\hat{T}_z(\psi)$.

Пользуясь (61,10) и (61,13′), находим, перемножая матрицы:

$$\hat{T}=\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}\cos\frac{\vartheta}{2} & ie^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ ie^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)}\sin\frac{\vartheta}{2} & e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}\cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}. \qquad (61,14)$$

Впервые эта матрица была получена Паули. Двухкомпонентная волновая функция $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, преобразующаяся при вращении системы координат по закону $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}=\hat{T}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, называется спинором.

Введенные нами компоненты спинора обычно обозначают как

$$\varphi=\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для любого заданного спинора $\varphi=\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$ всегда можно найти такую матрицу $\hat{T}(\varphi, \vartheta, \psi)$, что $\varphi^{1'}=1$, $\varphi^{2'}=0$, т. е. всегда можно определить направление, характеризуемое углами $(\varphi, \vartheta, \psi)$, по которому ориентирован спин частицы.

Матрицу $\hat{T}$ перепишем в виде

$$\hat{T}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

так что

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{1'} &= \alpha\varphi^1+\beta\varphi^2, \\ \varphi^{2'} &= \gamma\varphi^1+\delta\varphi^2, \end{aligned}\right\} \qquad (61,15)$$

где, как это следует из (61,14),

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \delta^*, \\ \beta &= -\gamma^*, \\ \alpha\delta-\beta\gamma &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (61,16)$$

Преобразование (61,15) обычно называется бинарным преобразованием.

Бинарное преобразование оставляет инвариантными некоторые билинейные формы. Действительно, используя (61,15), (61,16), легко получим для двух произвольных спиноров φ и η:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{1'}\eta^{2'}-\varphi^{2'}\eta^{1'}=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\varphi^1\eta^2-\varphi^2\eta^1)=\varphi^1\eta^2-\varphi^2\eta^1, \\ &\varphi^{1*}\varphi^1+\varphi^{2*}\varphi^2=\text{const}. \end{aligned}\right\} \qquad (61,17)$$

Последнее соотношение выражает сохранение нормировки при вращении системы координат.

С помощью компонент спиноров η^1, η^2 и ζ^1, ζ^2 можно построить величины, преобразующиеся при вращении системы координат, как компоненты вектора, т. е. по закону

$$a_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} a_k,$$

где α_{ik} — косинусы углов между старыми и новыми осями координат. Непосредственной проверкой, используя (61,14), (61,15), можно убедиться, что компоненты вектора определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} a_z &= (\eta^1\zeta^2 + \eta^2\zeta^1), \\ a_x &= (\eta^2\zeta^2 - \eta^1\zeta^1), \\ a_y &= -i\,(\eta^1\zeta^1 + \eta^2\zeta^2). \end{aligned}\right\} \qquad (61,18)$$

Соответственно для квадрата вектора имеем

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = (\eta^1\zeta^2 - \eta^2\zeta^1)^2. \qquad (61,19)$$

Мы получили, как и следовало ожидать, скалярную величину.

Компоненты тензора произвольного ранга $B_{ikl\ldots}$ можно определить как произведение $a_i b_k c_l \ldots$ соответствующих компонент векторов. С помощью формул (61,18) мы можем сопоставить компонентам $B_{ikl\ldots}$ произведения компонент спиноров.

Определим, наконец, закон преобразования спинора при инверсии системы координат, т. е. при преобразовании $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$.

Оператор инверсии обозначим через $\hat{I}$, так что

$$\varphi' = \hat{I}\varphi. \qquad (61,20)$$

Преобразование (61,20) опять можно рассматривать как переход к другому представлению. Соответствующее преобразование операторов $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$ аналогично (61,6). С другой стороны, операторы $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$ мы можем рассматривать как компоненты аксиального вектора (как и компоненты орбитального момента). Следовательно, эти операторы не должны изменять знак при отражении. Основываясь на этом, получаем аналогично формуле (61,6):

$$\left.\begin{aligned} \hat{s}_x &= \hat{I}\hat{s}_x\hat{I}^{-1}, \\ \hat{s}_y &= \hat{I}\hat{s}_y\hat{I}^{-1}, \\ \hat{s}_z &= \hat{I}\hat{s}_z\hat{I}^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (61,21)$$

При двукратном применении матрицы $\hat{I}$ мы возвращаемся к исходному состоянию и, следовательно, должны получить спинор φ. Кроме того, мы можем получить спинор $-\varphi$, если будем рассматривать двукратное отражение как поворот на угол 2π, а при таком повороте, как видно из формул (61,10), (61,13′), спинор меняет знак. Соответственно имеем:

$$\hat{I}^2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{61,22}$$

Мы видим, следовательно, что матрица $\hat{I}$ должна коммутировать с матрицами $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$, а квадрат ее должен давать единичную матрицу, умноженную на ± 1. Указанные требования будут выполнены при условии, что

$$\hat{I} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \hat{I} = \pm i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{61,23}$$

Следовательно, при отражении спинор может преобразоваться следующим образом:

$$\varphi' = \pm \varphi \tag{61,24}$$

или

$$\varphi' = \pm i\varphi. \tag{61,25}$$

Если закон преобразования определяется верхним знаком в формулах (61,24) и (61,25), то φ иногда называют полярным спинором, если нижним, то — псевдоспинором.

§ 62. Полный момент количества движения

Полный момент количества движения частицы складывается из орбитального и спинового моментов. По правилам сложения векторных операторов имеем для оператора полного момента $\hat{\boldsymbol{j}}$:

$$\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{l}} + \hat{\boldsymbol{s}}. \tag{62,1}$$

Операторы орбитального и спинового моментов действуют на разные переменные. Первый — на пространственные переменные, второй — лишь на спиновые. Поэтому оба эти оператора коммутируют между собой. Из этого непосредственно вытекает, что проекции оператора полного момента удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и проекции орбитального и спинового моментов. Эти перестановочные соотношения следуют и из связи оператора полного момента с оператором поворота.