При двукратном применении матрицы $\hat{I}$ мы возвращаемся к исходному состоянию и, следовательно, должны получить спинор φ. Кроме того, мы можем получить спинор $-\varphi$, если будем рассматривать двукратное отражение как поворот на угол 2π, а при таком повороте, как видно из формул (61,10), (61,13′), спинор меняет знак. Соответственно имеем:

$$\hat{I}^2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{61,22}$$

Мы видим, следовательно, что матрица $\hat{I}$ должна коммутировать с матрицами $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$, а квадрат ее должен давать единичную матрицу, умноженную на ± 1. Указанные требования будут выполнены при условии, что

$$\hat{I} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \hat{I} = \pm i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{61,23}$$

Следовательно, при отражении спинор может преобразоваться следующим образом:

$$\varphi' = \pm \varphi \tag{61,24}$$

или

$$\varphi' = \pm i\varphi. \tag{61,25}$$

Если закон преобразования определяется верхним знаком в формулах (61,24) и (61,25), то φ иногда называют полярным спинором, если нижним, то — псевдоспинором.

§ 62. Полный момент количества движения

Полный момент количества движения частицы складывается из орбитального и спинового моментов. По правилам сложения векторных операторов имеем для оператора полного момента $\hat{\boldsymbol{j}}$:

$$\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{l}} + \hat{\boldsymbol{s}}. \tag{62,1}$$

Операторы орбитального и спинового моментов действуют на разные переменные. Первый — на пространственные переменные, второй — лишь на спиновые. Поэтому оба эти оператора коммутируют между собой. Из этого непосредственно вытекает, что проекции оператора полного момента удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и проекции орбитального и спинового моментов. Эти перестановочные соотношения следуют и из связи оператора полного момента с оператором поворота.

(см. ниже):

$$\left.\begin{aligned} \hat{j}_x\hat{j}_y - \hat{j}_y\hat{j}_x &= i\hbar\hat{j}_z, \\ \hat{j}_y\hat{j}_z - \hat{j}_z\hat{j}_y &= i\hbar\hat{j}_x, \\ \hat{j}_z\hat{j}_x - \hat{j}_x\hat{j}_z &= i\hbar\hat{j}_y, \end{aligned}\right\} \tag{62,2}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} \hat{j}_x\hat{j}^2 - \hat{j}^2\hat{j}_x &= 0, \\ \hat{j}_y\hat{j}^2 - \hat{j}^2\hat{j}_y &= 0, \\ \hat{j}_z\hat{j}^2 - \hat{j}^2\hat{j}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{62,3}$$

Из соотношений (62,2) следует (см. § 51), что собственные значения оператора $\hat{j}^2$ имеют вид

$$j^2 = \hbar^2 j(j+1). \tag{62,4}$$

Значение квантового числа j определяет величину полного момента количества движения. По правилам сложения моментов в квантовой механике (52,1) следует, что число j при заданных l и s пробегает ряд значений

$$j = |l-s|, \quad |l-s|+1, \ \ldots, \ l+s-1, \quad l+s.$$

Квантовое число j принимает целые значения, если спин имеет целочисленное значение, и полуцелые, если спин полуцелый.

Покажем, что в случае частицы, движущейся в свободном пространстве или в центрально-симметричном поле, интегралом движения является именно полный момент количества движения. Для доказательства введем оператор поворота $\hat{R}$, учитывающий изменение как спиновых, так и пространственных координат волновой функции. Рассмотрим поворот системы координат вокруг оси z на некоторый малый угол $\delta\varphi$. Исходя из результатов, полученных в §§ 30 и 61, легко определить изменение полной волновой функции при таком вращении:

$$\psi' = \hat{R}_z\psi = \hat{T}_z\hat{W}_z\psi = \left[1 + \frac{i}{\hbar}\,\delta\varphi(\hat{s}_z + \hat{l}_z)\right]\psi = \left(1 + \frac{i}{\hbar}\,\delta\varphi\hat{j}_z\right)\psi.$$

Аналогичное соотношение имеет место, конечно, и для поворота вокруг любой другой оси. Мы видим, следовательно, что с оператором поворота связан именно оператор полного момента количества движения. Но операция поворота в силу изотропии пространства не должна изменять гамильтониана замкнутой системы (или системы в центрально-симметричном поле). Математически это проявляется в том, что оператор $\hat{R}_z$, а следовательно, и оператор $\hat{j}_z$ будут коммутировать с гамильтонианом частицы $\hat{H}$.

Таким образом, закон сохранения полного момента количества движения есть следствие изотропии пространства. Для спинового и орбитального моментов порознь законы сохранения имеют место лишь приближенно при пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием.

Если мы имеем систему невзаимодействующих частиц, то полный момент количества движения всей системы $\hat{J}$ складывается из моментов отдельных частиц $\hat{j}_k$ по правилам сложения моментов в квантовой механике

$$\hat{J} = \sum \hat{j}_k. \tag{62,5}$$

Можно ввести также оператор орбитального момента количества движения $\hat{L}$:

$$\hat{L} = \sum_k \hat{l}_k \tag{62,6}$$

и оператор полного спина системы $\hat{S}$:

$$\hat{S} = \sum_k \hat{s}_k. \tag{62,7}$$

Так как $\hat{j}_k = \hat{l}_k + \hat{s}_k$, то, очевидно, имеем

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}. \tag{62,8}$$

Операторы, относящиеся к разным частицам, коммутируют между собой, так как они действуют на разные переменные. Поэтому для операторов проекций полных моментов $\hat{J}$, $\hat{L}$, $\hat{S}$ имеют место такие же коммутационные соотношения, как и для операторов, относящихся к отдельным частицам. Например, для операторов проекций $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ полного момента имеем

$$\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x = \sum_{k,i} (\hat{j}_{kx}\hat{j}_{iy} - \hat{j}_{iy}\hat{j}_{kx}) =$$
$$= \sum_k (\hat{j}_{kx}\hat{j}_{ky} - \hat{j}_{ky}\hat{j}_{kx}) = i\hbar \sum_k \hat{j}_{kz} = i\hbar\hat{J}_z.$$

Аналогичный результат имеет место для остальных проекций оператора $\hat{J}$, а также для операторов $\hat{L}$ и $\hat{S}$.

При заданных собственных значениях операторов, относящихся к отдельным частицам, собственные значения операторов, $\hat{J}^2$, $\hat{L}^2$, $\hat{S}^2$ и операторов проекций моментов определяются по правилу сложения моментов в квантовой механике. Сохраняющейся величиной для системы частиц является полный момент J.